Idade do Universo, velocidades de recessão e horizontes nos Modelos de Big Bang*

D. Maia
e
P. Crawford†
Departamento de Física e Centro Física Nuclear da Universidade de Lisboa
Av. Prof. Gama Pinto,2 1699 Lisboa Codex

1 Os Modelos de Robertson-Walker

A partir de dados observacionais podemos inferir que o Universo actual é espacialmente homogéneo e isotrópico a uma larga escala [1−3]. Em relatividade generalizada, o modelo do Universo é caracterizado pela métrica. Para um Universo homogéneo e isotrópico, a métrica mais geral é a de Robertson-Walker (RW) que se escreve

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)]$$

onde $f_k(\chi)$ depende do índice de curvatura k associado à geometria espacial do Universo

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & k = 1 \quad \text{Universo fechado} \\ \sinh\chi & k = -1 \quad \text{Universo aberto} \\ \chi & k = 0 \quad \text{Universo plano} \end{cases}$$

As coordenadas angulares θ e ϕ variam, respectivamente, entre $[0, \pi]$ e $[0, 2\pi)$. A coordenada adimensional χ varia de 0 a $+\infty$ para $k = 0$ ou $k = -1$, e de 0 a π para $k = +1$. A coordenada temporal t mede o tempo próprio dos observadores (fundamentais) comóveis, isto é, aqueles que estão em repouso em relação à matéria média do Universo, e que por isso têm coordenadas espaciais constantes; a função $a(t)$ é o factor de escala, o qual caracteriza a evolução temporal do Universo.

A dinâmica do Universo é governada pelas equações de Einstein, que para esta métrica são:

$$H^2 = (\dot{a}/a)^2 = 8\pi G\rho/3 - k/a^2 + \Lambda/3 \tag{1}$$

*Versão alargada de uma comunicação apresentada no Encontro Nacional de Astronomia e Astrofísica, Faculdade de Ciências de Lisboa, 31 de Agosto de 1992. Trabalho subsidiado em parte pela bolsa de Mestrado, Programa Ciência, 2198/91 - RM, JNICT.

†e-mail:crawford@cosmo.fis.fc.ul.pt

$$\ddot{a}/a = \Lambda/3 - 4\pi G(\rho + 3p)/3, \tag{2}$$

onde $H(t)$ é a "constante" de Hubble, ρ a densidade de massa-energia, p a pressão isotrópica e Λ a constante cosmológica (que vamos supor nula). A equação (1) permite-nos definir o parâmetro adimensional densidade Ω

$$k/a^2 = H^2(\Omega - 1), \Omega = 8\pi G\rho/3H^2, \tag{3}$$

que exprime a relação ρ/ρ_c entre a densidade de massa-energia e o valor crítico $\rho_c = 3H^2/8\pi G$. Se nos restringirmos à massa luminosa é possível medir Ω directamente e obter assim informação sobre o modelo RW do Universo,

$$k = \begin{cases} +1 & , \quad \Omega > 1 \quad \text{(Universo fechado)} \\ -1 & , \quad \Omega < 1 \quad \text{(Universo aberto)} \\ 0 & , \quad \Omega = 1 \quad \text{(Universo de Einstein-DeSitter)} \end{cases}$$

Das equações (1) e (2), obtém-se

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -p\frac{da^3}{dt} \tag{4}$$

Antes de integrar as equações de Einstein vamos discutir alguns conceitos fundamentais, tais como: distância própria, desvio (cosmológico) para o vermelho e velocidade de recessão, que servem de base à cosmologia moderna, quer seja teórica ou observacional.

Dados dois observadores fundamentais com coordenadas fixas respectivamente (χ_0, θ, ϕ) e (χ, θ, ϕ), a *distância própria* entre eles no instante t é

$$d(t) = a(t) \mid \chi - \chi_0 \mid$$

A velocidade relativa correspondente é

$$v_r(t) = \dot{d}(t) = \dot{a}(t) \mid \chi - \chi_0 \mid = H(t)d(t).$$

Num Universo em expansão ($H > 0$) os observadores que acompanham a expansão estão a afastar-se, daí esta velocidade ser dita de recessão. Esta relação exprime a chamada lei de Hubble.

Vamos agora considerar a propagação da luz. Um fotão desloca-se no espaço-tempo ao longo de geodésicas nulas caracterizadas por $ds^2 = 0$. Para uma propagação radial isto significa

$$dt = \pm a(t)d\chi.$$

Suponhamos um feixe luminoso emitido num instante t_e num ponto com coordenada $\chi = \chi_e$ e detectado num instante t_0 posterior num ponto de coordenada $\chi = 0$. A $t_0 - t_e$ chamamos *tempo de voo* do fotão, o qual é muitas vezes utilizado como indicador de distância. Como o fotão se desloca no sentido do receptor escolhemos o sinal negativo na expressão acima. A coordenada radial do fotão num instante intermédio será

$$\chi_\gamma(t) = \chi_e - \int_{t_e}^{t} \frac{d\xi}{a(\xi)} \tag{5}$$

A distância própria do fotão ao ponto de recepção é $d_\gamma(t) = a(t)\chi(t)$. A velocidade de recessão do fotão relativamente ao receptor é

$$v_\gamma = \frac{d}{dt}(d_\gamma(t)) = \frac{da(t)}{dt}\chi + a(t)\frac{d\chi}{dt} = v_r(t) - 1 \tag{6}$$

$v_r(t)$ é a velocidade de recessão dum observador comóvel que se encontra no ponto onde passa o fotão no instante t. Esta expressão é curiosa: a velocidade de recessão do observador e a velocidade local do fotão ($c = 1$) somam-se como velocidades newtonianas. Porém, note-se que v_γ não é uma velocidade física, como veremos adiante. O desvio de linhas espectrais em função do comprimento de onda λ é definido por

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1,$$

O comprimento de onda comporta-se como um comprimento qualquer sendo a sua evolução temporal dada pelo factor de escala $a(t)$. Teremos então

$$z + 1 = a(t_0)/a(t_e) = d(t_0)/d(t_e) \tag{7}$$

O desvio no comprimento de onda é função da razão entre a distância própria no momento da recepção e a distância própria no momento da emissão. Para um Universo em expansão o quociente é maior que um e o desvio é para o vermelho.

As equações de Einstein determinam uma solução, uma vez dada uma equação de estado $p = p(\rho)$ e o índice de curvatura k. Consideremos um Universo dominado pela matéria onde $p \sim 0$ e logo por (4) vem $\rho \propto a^{-3}$. A equação (1) pode então escrever-se sob a forma

$$H^2 = (\dot{a}/a)^2 = \beta a^{-3} - k a^{-2}, \tag{8}$$

sendo β uma constante.

Para o Universo plano de Einstein-DeSitter $k = 0 (\Omega = 1)$, a integração dá

$$a(t) = (3/2\ t)^{2/3}\beta^{1/3}. \tag{9}$$

Também de integração imediata é o caso $\Omega = 0$ (Universo de Milne), que corresponde a um Universo em expansão desprovido de matéria e com $k = -1$. A equação (3) fica simplesmente $\dot{a}^2 = 1$ e vem $a(t) = t$. Para os casos mais gerais $k = \pm 1$ é conveniente introduzir a variável temporal η tal que $dt = a d\eta$. As soluções vêm então em função deste tempo (conformal)

$$a = \frac{\beta}{2}(1 - \cos\eta), \quad t = \frac{\beta}{2}(\eta - \sin\eta), \quad (k = +1) \tag{10}$$

$$a = \frac{\beta}{2}(\cosh\eta - 1), \quad t = \frac{\beta}{2}(\sinh\eta - \eta), \quad (k = -1) \tag{11}$$

Para utilização posterior é conveniente escrever o β que surge nas equações (10) e (11) em função de H e Ω. Das equações (3) e (8) obtém-se

$$H\beta = [k/(\Omega - 1)]^{3/2}\Omega \tag{12}$$

Admitimos que $a = 0$ na origem do tempo para todos os modelos. Isto corresponde a uma singularidade após a qual surgiu o Universo (o espaço e o tempo); a coordenada t mede a "idade" do Universo para um observador fundamental.

2 Limites do Parâmetro densidade e Idade do Universo

Vamos em seguida ver que a partir de H_0 e Ω_0 (valores actuais da constante de Hubble e do parâmetro densidade) podemos conhecer a idade do Universo t_0 [4].

Para $k = 0(\Omega = 1), H = \dot{a}/a = 2/(3t)$ vem

$$t_0 H_0 = 2/3. \tag{13}$$

Num Universo em expansão ($\eta_0 < \pi$) com $k = 1(\Omega > 1)$ vemos a partir de (8) e (10) que

$$t_0 H_0 = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \arccos(\frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0}) - \frac{1}{\Omega_0 - 1}. \tag{14}$$

Para um Universo com $k = -1(\Omega < 1)$ obtemos a partir de (8) e (11):

$$t_0 H_0 = \frac{1}{1 - \Omega_0} - \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} \ln[\frac{2 - \Omega_0 + 2\sqrt{1 - \Omega_0}}{\Omega_0}], \tag{15}$$

e para o caso particular $\Omega = 0, H = 1/t$

$$t_0 H_0 = 1 \quad \text{(Universo de Milne)}. \tag{16}$$

O gráfico 1 ilustra o aspecto da função $t_0 H_0(\Omega_0)$. É uma função contínua decrescente, tendendo para 1 quando $\Omega_0 \to 0$ (Universo de Milne) e para 2/3 quando $\Omega_0 \to 1$ (Universo plano de Einstein-DeSitter).

A razão isotópica dos elementos pesados nos meteoritos [2] sugere para a idade da galáxia t_G:

$$12 \times 10^9 ano < t_G < 20 \times 10^9 ano.$$

Medições da idade de enxames globulares [2] dão o valor

$$t_{eg} > 11.5 \times 10^9 ano.$$

Os valores de t_G e t_{eg} fornecem estimativas inferiores para t_0. Os valores experimentais para H_0 situam-se entre 0.4×10^{-10}ano^{-1} e 10^{-10}ano^{-1}. Conjugando isto com $t_0 > 11.5 \times 10^9$ ano, obtemos para $t_0 H_0$ um valor entre 0.46 e 1. Nenhum dos três tipos de Universo está assim excluído, embora isto permita encontrar um valor superior para Ω_0, $\Omega_0 < 4$.

Medições de velocidades em escalas superiores a $100 Kpc$ fornecem uma estimativa Ω_v que parece eliminar a possibilidade de um Universo fechado [3]:

$$\Omega_v h_0^2 \approx 0.1$$

onde h_0 é H_0 em unidades de 10^{-10}ano^{-1} (está entre 0.5 e 1). A fracção de Ω_0 na matéria luminosa é muito inferior [3]:

$$\Omega_{lum} h_0^2 \approx 0.005.$$

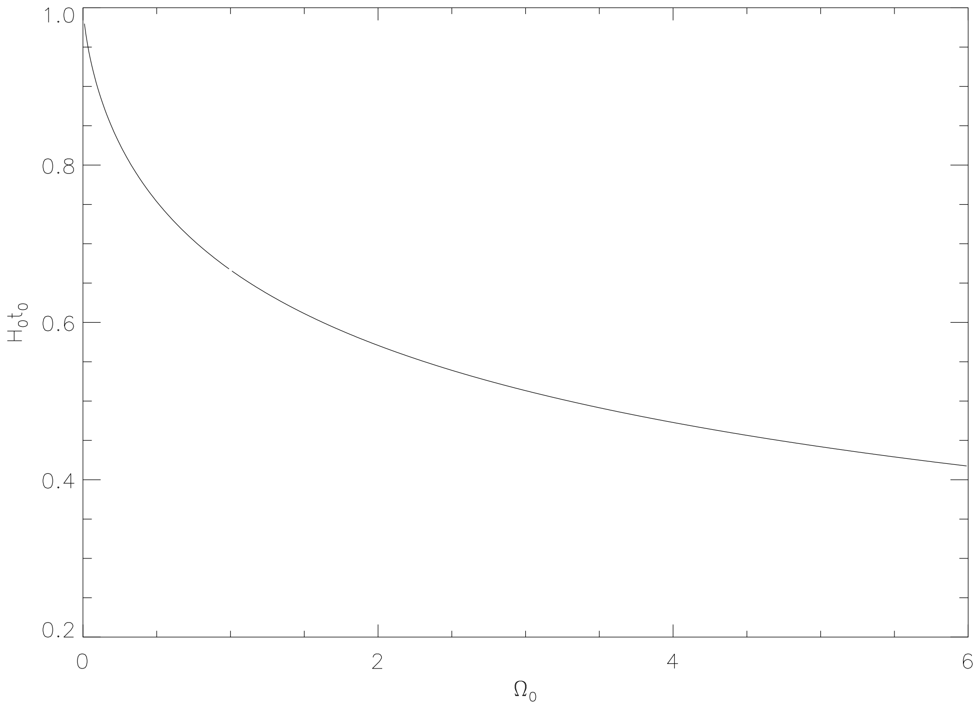

Figura 1: Idade do Universo em função do parâmetro densidade

Cálculos da nucleossíntese primordial, por outro lado, fornecem para a porção de Ω_0 nos bariões [1],[3]:

$$0.01 < \Omega_B h_0^2 < 0.04$$

De $\Omega_B > \Omega_{lum}$ podemos concluir que haverá matéria "negra"bariónica (isto é, não luminosa), enquanto $\Omega_v > \Omega_B$ permite supor a existência de matéria negra não bariónica.

3 Velocidades de Recessão e Desvio para o Vermelho

A velocidade de recessão entre dois observadores comóveis indica como varia com o tempo a distância própria entre eles. Mas como não é uma velocidade cinemática, não existe contradição com o princípio da relatividade mesmo quando excede a velocidade da luz no vácuo. Notemos que num espaço-tempo curvo da relatividade generalizada, a relatividade restrita tem só uma validade local. Se quisermos informações acerca de algo que se passa noutro ponto do espaço, teremos que pedir a um observador aí colocado que nos informe. Como para um observador comóvel as coordenadas espaciais (χ, θ, ϕ) são fixas, a sua velocidade física local é nula. A velocidade de recessão entre dois observadores fundamentais não é uma velocidade cinemática mas somente uma medida da taxa de variação do factor de escala que afecta os comprimentos espaciais;

isto explica porque razão são possíveis velocidades de recessão superiores à velocidade da luz (quando $d > 1/H$) [5],[6].

Num Universo homogéneo e isotrópico podemos escolher qualquer ponto para origem das coordenadas espaciais, e qualquer orientação como sendo a radial. Vamos considerar a origem como estando no receptor e estudar a propagação dum fotão segundo a direcção radial. No resto desta secção, e na que se segue, suporemos sempre fontes e receptores solidários com observadores comóveis. Nestas condições, sendo χ_e a coordenada radial do emissor, a distância própria deste relativamente ao receptor, num instante t é $d(t) = a(t)\chi_e$. Esta é a distância percorrida por um fotão com tempo de voo $t_{voo} = t_0 - t_e$, sendo χ_e dado pela expressão (5) encontrada na secção 2. Sabemos que esta radiação sofre um desvio para o vermelho de origem cosmológica que está relacionado com a variação da distância própria, como vimos na secção 2. Utilizando a fórmula (5) e as que vão de (7) a (12) conseguimos escrever $v_r(t_0)$ em função de Ω_0 e z

$$v_r(t_0) = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}} \ln \frac{(2-\Omega_0+2\sqrt{1-\Omega_0})(z+1)}{2-\Omega_0+z\Omega_0+2\sqrt{(1-\Omega_0)(1+\Omega_0 z)}} \quad , \quad 0 \leq \Omega_0 < 1 \tag{17}$$

em particular,

$$v_r(t_0) = \ln(z+1) \quad , \quad \Omega_0 = 0 \tag{18}$$

$$v_r(t_0) = 2(1 - \frac{1}{\sqrt{(1+z)}}) \quad , \quad \Omega_0 = 1 \tag{19}$$

$$v_r(t_0) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 - 1}}[\arccos \frac{2-\Omega_0}{\Omega_0} - \arccos \frac{2-\Omega_0+z\Omega_0}{\Omega_0(z+1)}] \quad , \quad \Omega_0 > 1 \tag{20}$$

Podemos facilmente obter o tempo de voo dos fotões $t_{voo} = t_0 - t_e$. Para k=0 vem

$$H_0 t_{voo} = 2/3\,[1-(z+1)^{-3/2}] \quad , \Omega_0 = 1 \tag{21}$$

Para $k = \pm 1$, podemos utilizar as expressões deduzidas para as velocidades de recessão e as eqs. (10) e (11),

$$H_0 t_{voo} = \frac{\sqrt{1+z\Omega_0}}{(\Omega_0-1)(z+1)} + \frac{v_r(t_0)\Omega_0 - 2}{2(\Omega_0-1)} \quad , \quad \Omega_0 \neq 1 \tag{22}$$

Para $\Omega_0 = 0$ esta expressão simplifica-se consideravelmente

$$H_0 t_{voo} = z/(z+1) \quad , \quad \Omega_0 = 0 \tag{23}$$

O gráfico 2 mostra o aspecto da curva $v_r(t_0)$ para um valor de t_0 fixo. A menos do valor de H_0 esta velocidade é a distância própria actual da fonte emissora, e este gráfico mostra que em qualquer dos tipos de Universo o desvio (cosmológico) para o vermelho é um bom indicador qualitativo da distância. No gráfico 3 ilustra-se o aspecto da velocidade de recessão na altura de emissão. Esta obtém-se facilmente a partir da definição de $v_r(t_0)$ e novamente com a ajuda das eqs. (10) e (11),

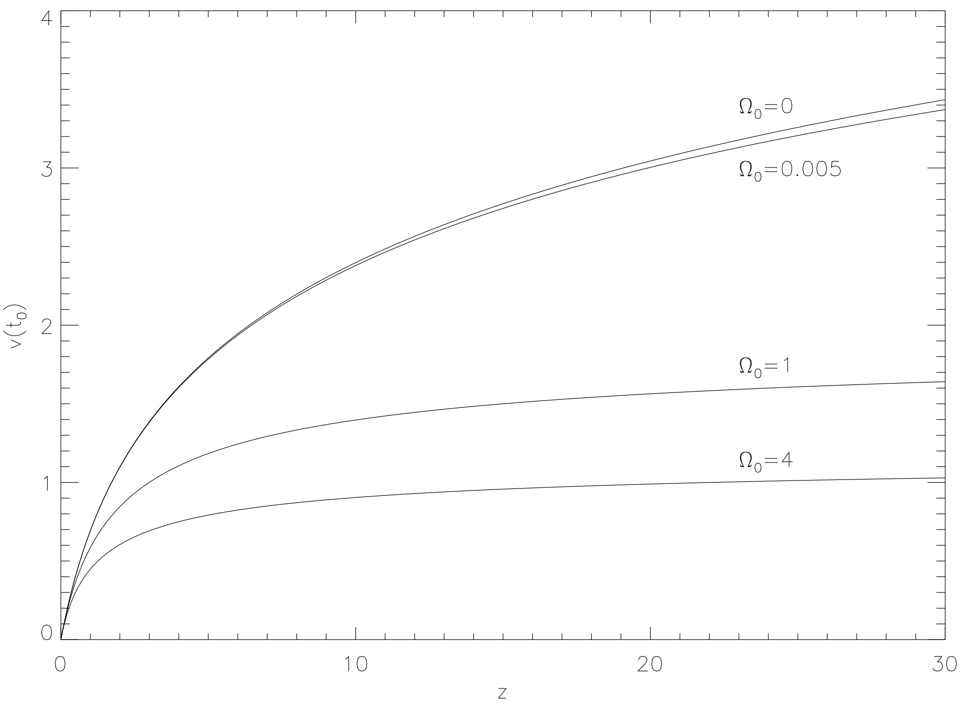

Figura 2: Velocidade de recessão em função do deslocamento para o vermelho no instante de observação.

$$v(t_e)/v(t_0) = \dot{a}(t_e)/\dot{a}(t_0) = \sqrt{1 + z\Omega_0}$$

Um desvio para o vermelho ($z > 0$) obriga a que $v(t_e) \geq v(t_0)$, verificando-se a igualdade para o Universo de Milne.

Em todos os modelos referidos, acima de determinados valores de z, surgem velocidades de recessão superiores à da luz. Na próxima secção, discutiremos as implicações desta propriedade dos Universos de RW para a observação astronómica.

4 Esfera de Hubble e Horizontes

Como se mostra a partir das fórmulas (17)–(20) da secção 3, os modelos RW permitem receber luz de regiões do espaço que se afastam de nós com velocidades de recessão superiores à da luz. Como se explica que essa luz chegue até nós? Existe então um limite para o Universo observável? Embora isto não entre em conflito com o princípio da relatividade, como se explicou anteriormente, justifica uma discussão alargada do conceito de *horizonte de partícula* ou Universo observável para um observador fundamental.

Horizontes de partícula são barreiras de informação que limitam as regiões do espaço com as quais pudemos comunicar no passado. Para os Universos RW um horizonte de partícula é uma superfície esférica com o observador no centro, que num dado instante divide o Universo numa região observável (dentro da esfera), e numa não observável (fora da esfera) [7]. Para saber se um dado objecto se encontra no interior do nosso horizonte de partícula (ou cone de luz do passado), num dado instante t_0, basta ver se um fotão emitido por esse objecto que começasse a viajar no instante $t > 0$ na nossa direcção nos atingiria num determinado instante t_0.

Consideremos uma esfera com raio $d_H = 1/H$, dita esfera de Hubble. Sobre a esfera a velocidade de recessão iguala a da luz, fora da esfera é superior à da luz, e dentro é inferior. Fotões emitidos fora desta esfera na nossa direcção, viajam (localmente) à velocidade da luz para os observadores fundamentais com os quais se cruzam, mas o espaço (a distância própria) que nos separa cresce a uma velocidade superior à da luz. Como vimos pela expressão (6) estas velocidades somam-se dando uma velocidade positiva para o fotão (a sua distância própria está a aumentar). Embora se desloquem na nossa direcção os fotões estão a afastar-se. Os que são emitidos dentro da esfera de Hubble, pelo contrário, aproximam-se de nós. Aqueles que são emitidos sobre a esfera, ficam momentaneamente "parados". Contudo, num Universo em desaceleração, a constante de Hubble diminui com o tempo e a esfera de Hubble expande-se. Fotões emitidos fora da esfera podem eventualmente ser alcançados e ficar dentro da esfera de Hubble; embora o mesmo possa não suceder com o emissor: os fotões são entidades dinâmicas cujas coordenadas espaciais variam, e por isso se afastam do emissor. Assim, os fotões começam então a aproximar-se de nós e acabamos por recebê-los. Concluimos que a esfera de Hubble e o horizonte de partícula (que define o Universo observável) não são a mesma coisa. O gráfico 3 ilustra estes aspectos. Como vimos atrás, a distância própria no instante de recepção aumenta com z, o que significa que se tomarmos o limite $z \to \infty$ obtemos a distância máxima a que um objecto observado pode estar. Esta é a definição de horizonte de partícula, que mais facilmente permite obter o seu valor usando as expressões (17) a (20), e recordando que $v_r(t_0) = d(t_0)/d_H(t_0)$. O horizonte de partícula, d_{Hp}, é dado então nos vários casos por

$$d_{Hp}(t_0) = \infty \quad , \Omega_0 = 0 \tag{24}$$

$$d_{Hp}(t_0) = \frac{d_H(t_0)}{\sqrt{1-\Omega_0}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\Omega_0}(2+\sqrt{1-\Omega_0})}{\Omega_0} \quad , 0 < \Omega_0 < 1 \tag{25}$$

$$d_{Hp}(t_0) = d_H(t_0) 2 \quad , \Omega_0 = 1 \tag{26}$$

$$d_{Hp}(t_0) = \frac{d_H(t_0)}{\sqrt{\Omega_0 - 1}} \arccos \frac{2-\Omega_0}{\Omega_0} \quad , \Omega_0 > 1 \tag{27}$$

5 Conclusões

A velocidade de recessão entre dois observadores fundamentais é um conceito geométrico ao qual não corresponde uma velocidade cinemática com significado físico. Contudo,

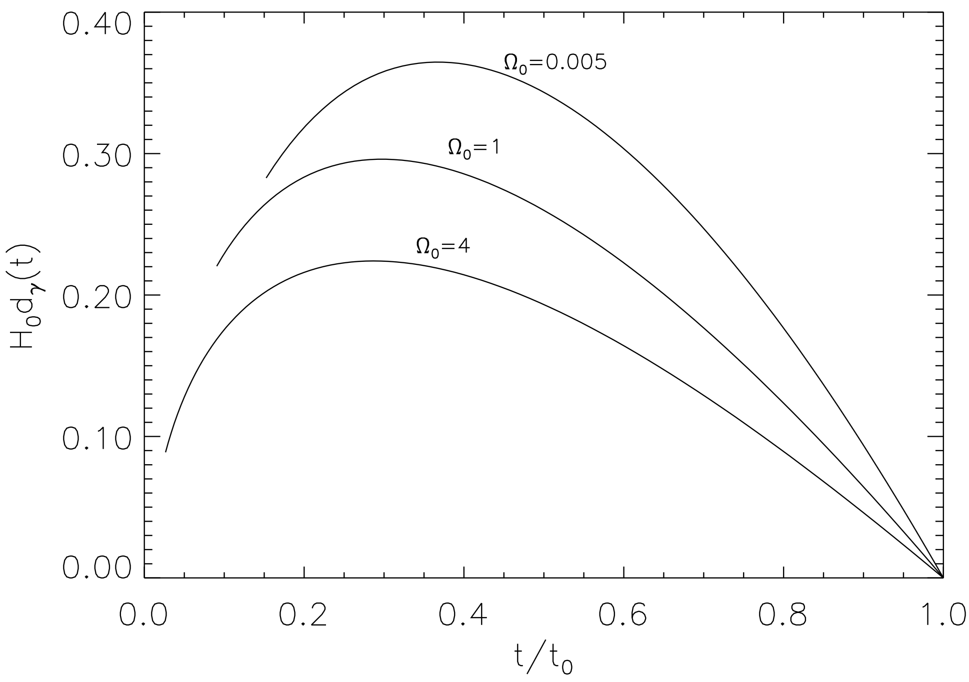

Figura 3: Variação da distância própria dum fotão com o tempo

para pequenos valores de z podemos utilizar a fórmula de Döppler não relativista, $v = z(c = 1)$, o que justifica a interpretação errónea tão difundida na literatura. Para maiores valores de z, no entanto, não só não é aplicável qualquer das fórmulas de Döppler, como também o valor de v_r depende do modelo do Universo. Nos modelos RW vimos que são mesmo possíveis velocidades de recessão superiores à velocidade da luz. Considerar o desvio para o vermelho como sendo devido à velocidade de recessão é não compreender a verdadeira causa do efeito. O deslocamento para o vermelho e a velocidade de recessão são ambos uma consequência da expansão do Universo. Calcular a velocidade de recessão a partir da fórmula de Döppler não relativista, evitando assim velocidades superiores à da luz, como se justifica muitas vezes na literatura, é completamente desprovido de significado. A existência de velocidades de recessão superiores à da luz surge apenas porque o fotão se desloca num Universo em expansão.

Embora de utilidade prática discutível, o conceito de distância própria é indispensável para analisar a fórmula de Hubble. Este conceito corresponde a uma extensão ao espaço-tempo curvo do conceito usual de distância, e pode-se relacionar de forma simples com outros tipos de distância vulgarmente utilizados em Astronomia (como a distância de luminosidade, por exemplo). Conhecendo bem os valores de Ω_0 e H_0 seria possível obter a distância própria a partir de z; as incertezas nesses valores (especialmente quanto a Ω_0) tornam este procedimento impracticável. Para compreender isto, basta analisar o quadro 1 onde se indicam valores de distância para um conjunto de *quasars* tabelados: as diferenças nos valores da distância própria para os vários valores de Ω_0 são significativas para grandes valores de z.

Quasar	z	Ω_0	$d(t_0)$ 10^9 ano-luz	$d(t_e)$ 10^9 ano-luz	t_{voo} 10^9 ano	$v(t_0)$	$v(t_e)$
PC 1247+3406	4.89	0.005	44.13	7.64	20.70	1.77	1.79
		1	29.40	4.99	15.50	1.18	2.86
		4	19.70	3.34	11.25	0.79	3.58
QSO 2000-330	3.78	0.005	38.97	8.15	19.72	1.56	1.57
		1	27.13	5.68	15.07	1.09	2.37
		4	18.47	3.86	10.98	0.74	2.97
PC 1248+4719	1.000	0.005	17.31	8.66	12.49	0.69	0.69
		1	14.65	7.32	10.77	0.59	0.83
		4	11.21	5.60	8.45	0.45	1.00
3C 345	0.595	0.005	11.66	7.31	9.32	0.47	0.47
		1	10.41	6.53	8.39	0.42	0.53
		4	8.42	5.28	6.88	0.34	0.62
3C 446	0.158	0.005	3.67	3.17	3.41	0.15	0.15
		1	3.54	3.05	3.29	0.14	0.15
		4	3.23	2.79	3.01	0.13	0.17

Quadro 1. Utilizou-se $h_0 = 0.4$

Referências

[1] J. Binney e S. Tremaine *Galactic Dynamics*, Princeton University Press 1987.

[2] G. Börner *The Early Universe, Facts and Fiction*, Springler-Verlag 1988.

[3] K. Olive and S. Rudaz *Big-Bang Cosmology*, Ph.Lett.B **239**,III.1(1990)

[4] J. Narlikar *General Relativity and Cosmology*, MacMillan 1979

[5] H. Murdoch *Recession velocities greater than light*, Q.Jl R. astr.Soc. **18**,242 (1977)

[6] W. Stuckey *Can Galaxies exist within our particle horizon with Hubble recessional velocities greater than c?*, Am.J.Phys. **60**,142 (1992)

[7] E.R. Harrison *Cosmology, the science of the Universe*, Cambridge University Press 1981.