

# XI Encontro Nacional de Astronomia e Astrofísica

Universidade da Madeira, Funchal - 26/27 de Julho de 2001

## Viagens Interestelares Hiper-rápidas em Relatividade Geral

*Francisco Lobo<sup>1</sup> e Paulo Crawford<sup>2</sup>*

*Centro de Astronomia e Astrofísica da Universidade de Lisboa  
Campo Grande, Ed. C8 1749-016 Lisboa, Portugal*

### Resumo

As enormes distâncias interestelares praticamente impossibilitam viagens de seres humanos a regiões longínquas da Via Láctea. A Relatividade Restrita (RR) diz-nos que uma partícula material não pode atingir a velocidade da luz,  $c$ . Isto também é válido em Relatividade Geral (RG) mas apenas *localmente*. Assim, se a velocidade da luz é inatingível, é natural pensarmos que entre dois pontos separados por uma distância própria,  $D$ , seja impossível efectuar uma viagem de ida e volta num intervalo de tempo inferior a  $2D/c$ , medido por um observador em repouso no ponto de partida. Na RR, sabemos que um viajante poderá fazer uma viagem num intervalo de tempo (próprio) reduzido se  $v$  se aproximar de  $c$ . Na RG, também é possível efectuar a mesma viagem num intervalo de tempo arbitrariamente pequeno, medido por um observador em repouso no ponto de partida, o que parece surpreendente.

Analisaremos algumas soluções das equações de Einstein que admitem viagens superluminais. Entre elas, destacaremos os *wormholes*, a solução de Alcubierre (*warp drive*), e uma solução conhecida por *Tubo de Krasnikov*. Todas estas soluções violam Condições de Energia, fundamentais para os teoremas das singularidades, sendo por isso a geometria do espaço-tempo respectivo produzida por matéria *exótica*.

---

<sup>1</sup> E-mail: flobo@cosmo.fis.fc.ul.pt

<sup>2</sup> E-mail: crawford@cosmo.fis.fc.ul.pt

# Índice

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>3</b>
<b>2. WORMHOLES TRANSITÁVEIS NO ESPAÇO-TEMPO .....</b>	<b>4</b>
2.1 PROPRIEDADES DO WORMHOLE TRANSITÁVEL .....	6
2.2 A MÉTRICA DO ESPAÇO-TEMPO .....	6
2.3 EQUAÇÕES DE ESTRUTURA DO WORMHOLE .....	6
2.3.1 <i>Os tensores de Riemann e de Einstein</i> .....	6
2.3.2 <i>O Tensor de energia-momento</i> .....	8
2.3.3 <i>As equações de campo de Einstein</i> .....	8
2.4 A GEOMETRIA ESPACIAL DO WORMHOLE: A MATEMÁTICA DO MERGULHO .....	9
2.5 FORÇAS GRAVITACIONAIS DE MARÉ E O TEMPO DE TRAVESSIA NO WORMHOLE .....	10
2.5.1 <i>Condições impostas nas estações</i> .....	11
2.5.2 <i>Condições impostas a uma travessia</i> .....	11
2.6 O TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO DO WORMHOLE .....	13
2.6.1 <i>Restrições impostas à tensão e à densidade de energia na garganta do wormhole</i> .....	13
2.6.2 <i>Matéria “exótica”</i> .....	14
2.7 UMA VIAGEM INTERESTELAR HIPER-RÁPIDA UTILIZANDO UM WORMHOLE .....	15
<b>3. WARP DRIVE.....</b>	<b>16</b>
3.1 A MÉTRICA .....	16
3.2 A CURVATURA EXTRÍNSECA E A EXPANSÃO .....	17
3.3 VIAGENS INTERESTELARES HIPER-RÁPIDAS .....	18
3.4 A DENSIDADE DE ENERGIA .....	19
3.5 ANÁLISE DE KRASNIKOV .....	20
<b>4. UM METROPOLITANO SUPERLUMINAL: O TUBO DE KRASNIKOV .....</b>	<b>22</b>
4.1 A MÉTRICA BI-DIMENSIONAL .....	22
4.2 AS PROPRIEDADES DA MÉTRICA .....	23
4.3 UMA VIAGEM SUPERLUMINAL ENTRE A TERRA E DENEK .....	24
4.4 UMA VIAGEM INSTANTÂNEA .....	24
4.5 A GENERALIZAÇÃO QUADRI-DIMENSIONAL .....	25
<b>5. RESTRIÇÕES IMPOSTAS PELA DESIGUALDADE QUÂNTICA.....</b>	<b>26</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>28</b>

# 1. Introdução

O homem tem procurado explorar a vastidão do cosmos nas últimas décadas. No entanto, no que respeita às viagens espaciais, tornou-se óbvio que os seus esforços são severamente limitados por duas formidáveis barreiras: a própria vastidão do espaço e a lentidão das viagens espaciais. Por exemplo, uma viagem a Marte, com as actuais velocidades das naves espaciais, demora vários meses e uma jornada à estrela mais próxima, Alfa de Centauro, levaria centenas de milhares de anos. As viagens até planetas de outros sistemas solares poderiam durar milhões de anos. Viagens com velocidades próximas da da luz, caso fossem tecnicamente possíveis, também não resolveriam todas as dificuldades, devido às enormes distâncias interestelares. Por exemplo, a distância até à estrela Polar é de 200pc, a Deneb é de 500pc e ao centro da Galáxia é de 10kpc.

Não faz muito sentido lançar uma expedição científica, ao sabermos que apenas daqui a milhares de anos receberíamos algumas notícias. Torna-se patente que, com a tecnologia actual, não podemos satisfazer as aspirações humanas de explorar livremente o cosmos, na esperança de visitar outras possíveis civilizações ou estudar de perto buracos negros, super-novas e outras maravilhas. Parece que estamos para sempre confinados à vizinhança imediata do Sistema Solar, destinados à solidão cósmica.

No presente trabalho iremos abordar este problema no contexto da Relatividade Geral (RG). Sabe-se que, em Relatividade Restrita (RR), uma partícula material não pode atingir a velocidade da luz,  $c$ . Em RG, tal também é válido, mas apenas *localmente*. Assim, se a velocidade da luz é inatingível, é natural pensarmos que entre dois pontos separados por uma distância própria,  $D$ , seja impossível efectuar uma viagem de ida e volta num intervalo de tempo inferior a  $2D/c$ , medido por um observador em repouso no ponto de partida. Na RR, sabemos que um viajante poderá fazer uma viagem num intervalo de tempo (próprio) reduzido se a sua velocidade,  $v$ , se aproximar de  $c$ . Na RG, também é possível efectuar a mesma viagem num intervalo de tempo arbitrariamente pequeno, medido por um observador em repouso no ponto de partida, o que parece surpreendente.

O ponto fundamental em RG, é que pode modificar-se o tempo necessário para efectuar uma viagem alterando a distância a percorrer, ou então obter velocidades arbitrariamente elevadas, sem no entanto atingir a velocidade da luz, localmente.

De seguida, analisaremos algumas soluções das equações de Einstein que admitem velocidades superluminais, úteis para possíveis viagens interestelares hiper-rápidas. Destacaremos:

- os *wormholes* transitáveis, que são atalhos hipotéticos, unindo duas regiões distintas do espaço-tempo;
- a solução de Alcubierre, denominada *warp drive*, inspirada na fase inflacionária do universo, em que as enormes velocidades atingidas advêm de uma expansão do próprio espaço-tempo;
- uma solução de um espaço-tempo globalmente hiperbólico, conhecida por *tubo de Krasnikov*, em que é possível a um viajante efectuar uma viagem de ida e volta num tempo arbitrariamente pequeno, tal como é medido por um observador em repouso no ponto de partida.

Todas estas soluções violam Condições de Energia, fundamentais para os teoremas das singularidades, sendo por isso a geometria do espaço-tempo respectivo produzida por matéria *exótica*.

## 2. Wormholes Transitáveis no Espaço-Tempo

É muito frequente os escritores de ficção científica utilizarem buracos negros para viagens interestelares rápidas. Imagina-se um viajante intrépido a lançar-se num buraco negro e subitamente a encontrar-se numa região distante do universo. No entanto é possível encontrar várias objecções às viagens interestelares utilizando buracos negros e wormholes de Schwarzschild. No horizonte de acontecimentos de um buraco negro de massa  $M$ , as forças gravitacionais de maré produzem acelerações relativas enormes num viajante, de altura  $L$ , da ordem de  $L(2GM)^{-2} \approx 10g_{\oplus} (L/1m)(M/10^4 M_{Sol})^{-2}$ , [1]. Se o buraco negro apresentar uma massa menor do que  $10^4 M_{Sol}$  e uma circunferência do horizonte de  $4\pi GM$  um viajante será certamente esmagado pelas forças de maré. O horizonte do buraco negro é uma “membrana” que pode ser considerada como uma via de apenas um sentido no qual os objectos entram, mas estão impossibilitados de sair. Logo uma viagem em dois sentidos é estritamente proibida, a não ser que o objecto de saída seja um buraco branco. Os buracos brancos possuem anti-horizontes, que são superfícies das quais apenas emergem objectos e são instáveis face a pequenas perturbações. Um pacote de onda de luz de baixa energia sofre um desvio para o azul e torna-se cada vez mais energético ao incidir num anti-horizonte. Devido ao aumento exponencial da energia o pacote de onda converte o anti-horizonte num horizonte num tempo aproximado de  $10GM \approx (M/10^4 M_{Sol}) s$ , [2]. Esta conversão que ocorre pouco depois da criação do anti-horizonte impede uma travessia em dois sentidos.

A métrica de Kerr, que descreve buracos negros em rotação, possui no seu interior túneis que ligam regiões assintoticamente planas do espaço-tempo. Se aceitarmos a formação dos túneis de Kerr, estes não existiriam por muito tempo devido à presença de horizontes de Cauchy que são instáveis relativamente a pequenas perturbações. Um pacote de onda incidente sofre um desvio para o azul, com um aumento exponencial da energia ao aproximar-se do horizonte de Cauchy, e cria campos gravitacionais intensos que fecham os túneis, possivelmente convertendo-os em singularidades físicas (este resultado é ainda incerto, pois apenas foi investigado em primeira ordem na teoria das perturbações). Logo, o interior de buracos negros de Kerr possivelmente não possui túneis que ligam outras regiões do espaço-tempo, mas singularidades que esmagariam qualquer viajante.

Se fosse possível a formação e a estabilização dos túneis de Kerr, estes possuiriam singularidades em forma de anel. Se a física fosse puramente clássica e o buraco negro suficientemente grande com uma rotação elevada, um viajante facilmente atravessaria a singularidade. No entanto, a teoria quântica do campo prevê que as singularidades quebram o vácuo, irradiando um fluxo intenso de partículas de altas energias que certamente mataria qualquer viajante.

Os wormholes oferecem um método alternativo às viagens interestelares rápidas. A fig.2.1 apresenta um diagrama de um wormhole que liga dois universos diferentes; a fig.2.2 apresenta duas regiões distantes do mesmo universo.

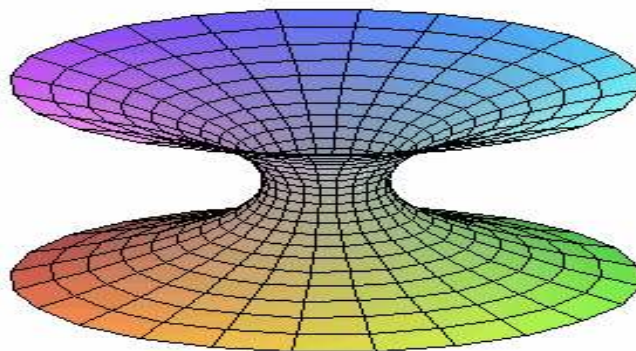


fig.2.1 Diagrama de um wormhole que liga dois universos diferentes.

Ambos os wormholes são descritos pela mesma solução das equações de campo de Einstein, mas diferem nas suas topologias. É importante salientar que as equações de campo não impõem restrições à topologia das soluções.

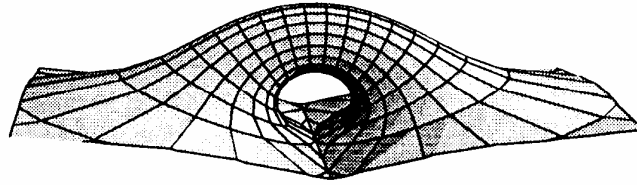


fig.2.2 Diagrama de um wormhole que liga duas regiões distintas de um espaço-tempo.

Mas também existem uma série de objecções às viagens interestelares utilizando os wormholes de Schwarzschild. As forças de maré de origem gravitacional na garganta do wormhole de Schwarzschild têm a mesma ordem de grandeza das do horizonte do buraco negro de Schwarzschild [1].

Um wormhole de Schwarzschild é dinâmico. Ao longo do tempo, expande-se a partir de uma circunferência nula (dois universos desligados) a um valor máximo na garganta, depois contrai-se novamente para um valor nulo. Esta expansão e contracção é tão rápida que é impossível efectuar uma viagem sem ser esmagado pela contracção. Tal como o buraco branco, o wormhole de Schwarzschild também possui um anti-horizonte que é altamente instável relativamente a pequenas perturbações.

Foi descoberta uma solução das equações de campo de Einstein por Kip Thorne e Michael Morris [2] que descreve um wormhole que é transitável no espaço-tempo. É uma solução relativamente simples, inspirada em parte por um desafio lançado por Carl Sagan sobre a possibilidade real de viagens interestelares rápidas, ideia que é utilizada no seu livro *Contacto* [3].

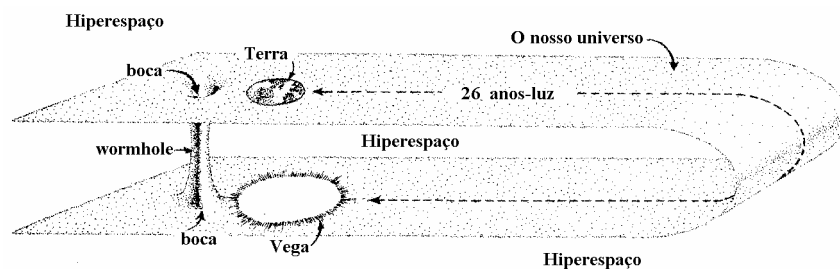


fig.2.3 O diagrama de mergulho do wormhole transitável utilizado no *Contacto* em que a personagem efectua uma viagem da Terra a Vega.

A restante parte deste capítulo é dedicada ao tratamento matemático sucinto de wormholes transitáveis no espaço-tempo.

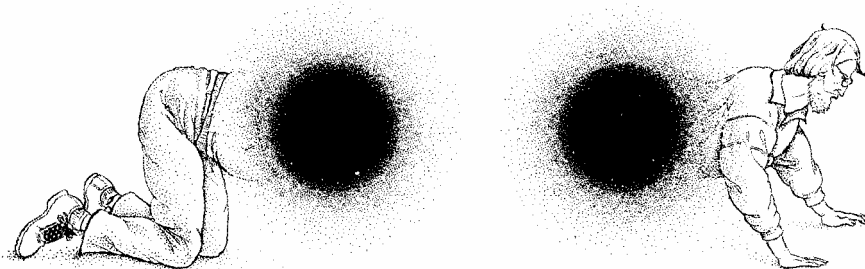


fig.2.4 Travessia de Kip Thorne através de um wormhole transitável.

## 2.1 Propriedades do wormhole transitável

Como vimos acima, existem várias objeções a viagens interestelares baseadas em buracos negros e wormholes de Schwarzschild. As propriedades impostas aos wormholes transitáveis são:

1. A métrica é esfericamente simétrica e estática. É uma condição imposta para simplificar os cálculos.
2. A solução deve obedecer às equações de campo de Einstein.
3. Para ser um wormhole, a solução implica a existência de uma garganta (um estreito fragmento do espaço-tempo extremamente curvo), que liga duas regiões assintoticamente planas do espaço-tempo.
4. A ausência de horizontes permite a viagem em dois sentidos.
5. As forças gravitacionais de maré sentidas por um viajante devem ser pequenas.
6. Um viajante deve atravessar o wormhole num tempo próprio razoável, tal como o tempo medido por um observador colocado numa região plana do espaço-tempo, ou seja, muito afastado do campo gravítico.
7. A matéria e os campos que geram a curvatura do espaço-tempo são descritas por um tensor de energia-momento com significado físico.
8. A solução deve ser estável face a pequenas perturbações durante a passagem do viajante.
9. Deve ser possível construir um wormhole com uma quantidade de matéria finita num intervalo de tempo finito.

Nas secções seguintes apresentamos um tratamento matemático geral dos wormholes transitáveis que gozam das propriedades acima estipuladas.

## 2.2 A métrica do espaço-tempo

A métrica do espaço-tempo é expressa numa forma estática e esfericamente simétrica, [1]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{b}{r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

$\Phi = \Phi(r)$  e  $b = b(r)$  são duas funções arbitrárias da coordenada radial. Como veremos mais abaixo,  $b(r)$  determina a forma do wormhole, logo será designada a *função de forma*;  $\Phi(r)$  determina o desvio para o vermelho de origem gravitacional, então será designada como a *função desvio para o vermelho*. A coordenada radial,  $r$ , tem um significado geométrico específico, em que  $2\pi r$  é a circunferência de um círculo centrado na garganta do wormhole. Consequentemente,  $r$  é não-monótona pois diminui de  $+\infty$  a um valor mínimo,  $b_0$ , na garganta e aumenta novamente para  $+\infty$ .

Num espaço-tempo estático e assintoticamente plano, as superfícies não-singulares em que  $g_{00} = -e^{2\Phi} \rightarrow 0$  são as que identificam os horizontes. Por exemplo, o wormhole de Schwarzschild possui um horizonte precisamente na garganta,  $r = 2GM$ . Logo, a condição do wormhole não possuir qualquer horizonte corresponde a  $\Phi(r)$  ser finita em qualquer ponto do espaço-tempo.

## 2.3 Equações de estrutura do wormhole

### 2.3.1 Os tensores de Riemann e de Einstein

Para determinar as equações de campo de Einstein e avaliar as forças de maré sentidas por viajantes que atravessam o wormhole, é preciso calcular os tensores de Riemann e Einstein da métrica, eq. (2.1).

A métrica é escrita da seguinte forma:  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  com  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \phi$  e  $g_{00} = -e^{2\Phi}$ ,  $g_{11} = (1 - b/r)^{-1}$ ,  $g_{22} = r^2$ ,  $g_{33} = r^2 \text{sen}^2 \theta$ . Esta permite determinar os símbolos de Cristoffel (conexões),  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda})$  em que  $g_{\lambda\beta,\gamma} = \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\gamma}$ , e consequentemente o tensor de Riemann, utilizando a seguinte expressão:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\lambda\delta} \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}$$

Os vectores de base utilizados são  $(\vec{e}_t, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi) \equiv (\partial/\partial t, \partial/\partial r, \partial/\partial \theta, \partial/\partial \phi)$  e estão associados ao sistema de coordenadas,  $(t, r, \theta, \phi)$ , de modo que a separação entre dois acontecimentos com uma separação de coordenadas  $(\Delta t, \Delta r, \Delta \theta, \Delta \phi)$  é  $\Delta s = \Delta t \vec{e}_t + \Delta r \vec{e}_r + \Delta \theta \vec{e}_\theta + \Delta \phi \vec{e}_\phi$ .

Os cálculos subsequentes e a respectiva interpretação física serão simplificados utilizando uma base de vectores ortonormados associada ao referencial próprio de um conjunto de observadores que se mantém em repouso no sistema de coordenadas com  $(r, \theta, \phi)$  constante. Utilizando a seguinte transformação  $\vec{e}_{\hat{\alpha}} = \Lambda^{\beta}_{\hat{\alpha}} \vec{e}_\beta$ , temos:

$$\begin{cases} \vec{e}_{\hat{t}} = e^{-\Phi} \vec{e}_t \\ \vec{e}_{\hat{r}} = (1 - b/r)^{1/2} \vec{e}_r \\ \vec{e}_{\hat{\theta}} = r^{-1} \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_{\hat{\phi}} = (r \text{sen} \theta)^{-1} \vec{e}_\phi \end{cases}, \quad \text{com} \quad (\Lambda^{\beta}_{\hat{\alpha}}) = \begin{bmatrix} e^{-\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - b/r)^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r \text{sen} \theta)^{-1} \end{bmatrix}$$

Nessa base os coeficientes da métrica tomam as suas formas da relatividade restrita:

$$g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \vec{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular o tensor de Ricci,  $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , e o escalar de curvatura,  $R$ , utilizamos as seguintes contracções  $R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R^{\hat{\alpha}}_{\hat{\mu}\hat{\alpha}\hat{\nu}}$ ,  $R = g^{\hat{\mu}\hat{\nu}} R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , através das quais podemos determinar o tensor de Einstein que aparece nas equações de campo,  $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2} R g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ . As componentes não nulas do tensor de Einstein são:

$$\begin{cases} G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{b'}{r^2} \\ G_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{b}{r^3} + 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r} \\ G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left( \Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)} \Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)} \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

### 2.3.2 O Tensor de energia-momento

O teorema de Birkhoff [1] estipula que as equações de campo de Einstein apenas permitem uma solução de vácuo de um wormhole esférico, nomeadamente a de um wormhole de Schwarzschild, que não é transitável. Logo um wormhole transitável é constituído por um tensor de energia-momento não-nulo.

Visto que as equações de campo de Einstein requerem que o tensor de energia-momento seja proporcional ao tensor de Einstein, na base ortonormada o tensor de energia-momento,  $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , tem a mesma estrutura algébrica do que  $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  da eq.(2.2). As únicas componentes não-nulas são pois  $T_{\hat{t}\hat{t}}, T_{\hat{r}\hat{r}}, T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$ . Atendendo ao facto de que os observadores estáticos utilizam os vectores de base ortonormados, cada uma das componentes do tensor de energia-momento tem uma interpretação física simples:

$$\begin{cases} T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r) \\ T_{\hat{r}\hat{r}} = -\tau(r) \\ T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p(r) \end{cases} \quad (2.3)$$

em que  $\rho(r)$  é a densidade de massa-energia total;  $\tau(r)$  é a tensão por unidade de área medida na direcção radial (i.e., a pressão radial a menos de um sinal negativo);  $p(r)$  é a pressão medida nas direcções laterais (direcções ortogonais à direcção radial).

### 2.3.3 As equações de campo de Einstein

As equações de campo de Einstein são  $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 8\pi GT_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$  e atendendo ao tensor de Einstein (eq.(2.2)) e o tensor de energia-momento (eq.(2.3)), temos:

$$\begin{cases} \rho = \frac{b'}{8\pi Gr^2} & (2.4) \\ \tau = \frac{[b/r - 2(r-b)\Phi']}{8\pi Gr^2} & (2.5) \\ p = \frac{r}{2} [(\rho - \tau)\Phi' - \tau'] - \tau & (2.6) \end{cases}$$

As equações de campo (2.4)-(2.6) são três equações diferenciais relacionadas com cinco funções desconhecidas da coordenada radial,  $r$ :  $\Phi(r)$ ,  $b(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $\tau(r)$  e  $p(r)$ . A resolução convencional dessas equações seria considerar uma espécie de campo ou matéria para a fonte do tensor de energia-momento, e através de uma análise física da fonte, derivar equações de estado para a tensão radial e a pressão lateral em função da densidade de massa-energia,  $\tau(r)$  e  $p(r)$ , respectivamente. Como resultado teríamos um sistema solúvel de cinco equações (duas equações de estado e três equações de campo) com cinco funções desconhecidas da coordenada radial,  $r$ . A título de exemplo, se estivéssemos a analisar a estrutura de estrelas de neutrões, considerávamos  $-\tau(\rho) = p(\rho)$  (a equação de estado deduzida da física nuclear). Um outro exemplo consiste no estudo de buracos negros electricamente carregados. Considerávamos  $\tau(\rho) = p(\rho) = \rho$  de acordo com o tensor de energia-momento de um campo eléctrico radial, e através das eq.(2.4)-(2.6) obtínhamos a solução de Reissner-Nordstrom das equações de campo de Einstein.

Na análise de wormholes transitáveis, a filosofia na resolução das equações de campo (2.4)-(2.6) é outra. Obter soluções com determinadas propriedades manipulando as funções  $\Phi(r)$  e  $b(r)$ . A



nossa escolha de  $b(r)$  fornecerá  $\rho(r)$  através da eq.(2.4);  $\Phi(r)$  e  $b(r)$  fornecerão  $\tau(r)$ , e consequentemente  $p(r)$ .

Em alguns casos, admitimos que o tensor de energia-momento que gera a curvatura do espaço-tempo do wormhole se estenda até raios arbitrariamente elevados. Em outros casos, podemos confiná-lo no interior de uma esfera de raio  $r=R_s$ . Nesse último caso, a tensão radial,  $\tau$ , é contínua e tende para zero no limite  $r \rightarrow R_s$ . A geometria do espaço-tempo exterior à região  $r=R_s$  tem a forma de Schwarzschild, condição imposta pelas equações (2.4)-(2.6), i.e.,  $b(r)=b(R_s)=const=B$  e  $\Phi(r)=1/2 \log(1-B/r)$  se  $r > R_s$ .

Se não houver um *cut-off* do tensor de energia-momento que gera a curvatura espaço-temporal do wormhole temos que impor a condição de que o espaço-tempo é assintoticamente plano no infinito, i.e.,  $b/r \rightarrow 0$  e  $\Phi \rightarrow 0$  se  $r \rightarrow +\infty$ .

## 2.4 A Geometria Espacial do Wormhole: a matemática do mergulho

Utilizam-se os diagramas de mergulho para demonstrar que a métrica, eq.(2.1), descreve um wormhole. A geometria do espaço tri-dimensional com a coordenada temporal fixa é de um interesse particular. A geometria é esfericamente simétrica [1], logo sem perda de generalidade, podemos confinar a análise a um plano equatorial ( $\theta = \pi/2$ ). O elemento de linha, com  $t=const.$  e  $\theta = \pi/2$ , atendendo à métrica, eq.(2.1), é:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.7)$$

O objectivo do mergulho é o de construir uma superfície bi-dimensional, mergulhada num espaço Euclídeo tri-dimensional, com a mesma geometria do que o plano equatorial descrito acima, i.e., queremos visualizar a camada equatorial removida do espaço-tempo e mergulhada no espaço Euclídeo.

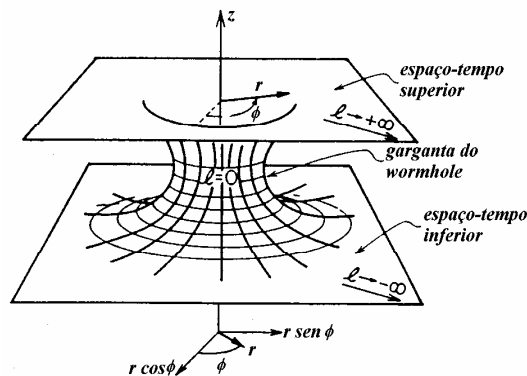


fig.2.5 O diagrama de mergulho de um wormhole que liga dois espaços-tempo diferentes.

Utilizam-se as coordenadas cilíndricas  $z$ ,  $r$  e  $\phi$  no espaço Euclídeo de mergulho. A métrica Euclídeana no espaço de mergulho tem a seguinte forma:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$$

A superfície de mergulho apresenta uma simetria axial e pode ser descrita pela função  $z(r)$ . O elemento de linha é:

$$ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2$$

que é a mesma da eq.(2.7), se identificarmos as coordenadas  $(r, \phi)$  do espaço de mergulho com as coordenadas  $(r, \phi)$  do espaço-tempo do wormhole. Logo, a função de forma  $z(r)$  satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left[ \frac{r}{b(r)} - 1 \right]^{-1/2} \quad (2.8)$$

O que demonstra o modo como  $b(r)$  condiciona a forma do wormhole.

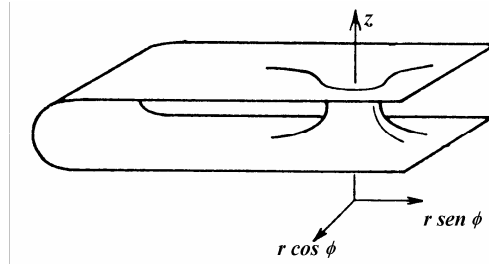


fig.2.6 O diagrama de mergulho de um wormhole que liga duas regiões de um espaço-tempo.

A distância radial é positiva acima (o universo ou espaço-tempo superior) e negativa abaixo (o espaço-tempo inferior) da garganta. A superfície de mergulho é assintoticamente plana a distâncias muito elevadas da garganta,  $\frac{dz}{dr}(l \rightarrow \pm\infty) = 0$ , o que corresponde às duas regiões assintoticamente planas que o wormhole liga.

## 2.5 Forças gravitacionais de maré e o tempo de travessia no wormhole

Imaginemos uma viagem através do wormhole, numa direcção radial, que se inicia em repouso numa estação espacial no universo inferior, em  $l=-l_1$ , e termina numa estação espacial no universo superior, em  $l=+l_2$ . Designemos por  $v(r)$  a velocidade radial de um viajante, medida por um observador estático em  $r$  e  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ , com  $\beta=v$ . Logo, em termos da distância própria percorrida,  $dl$ , o raio percorrido,  $dr$ , o tempo de coordenada decorrido,  $dt$ , e o tempo próprio medido pelo viajante,  $d\tau_T$ , temos:

$$v = \frac{dl}{e^\Phi dt} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} e^\Phi dt}$$

$$v\gamma = \frac{v}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \frac{dl}{d\tau_T} = \mp \frac{dr}{(1 - b/r)^{1/2} d\tau_T}$$

O sinal  $(-)$  refere-se à primeira parte da viagem (no universo inferior); o sinal  $(+)$  refere-se à segunda parte da viagem (no universo superior).

## 2.5.1 Condições impostas nas estações

Atendendo ao facto de que a viagem inicia e termina em estações em repouso, temos  $v=0$  em  $l=-l_1$  e  $l=+l_2$ , tal como  $v>0$  em  $-l_1 < l < +l_2$ . As estações em  $l=-l_1$  e  $l=+l_2$  estão suficientemente afastadas de modo que os efeitos gravitacionais sejam pequenos. Introduzimos as seguintes condições nas estações:

- (i) A geometria do espaço-tempo é assintoticamente plana, i.e.,  $b/r \ll 1$
- (ii) O desvio para o vermelho gravitacional de sinais enviados das estações até ao infinito é pequeno [1, 4]:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = e^{-\Phi} - 1 \approx -\Phi \Rightarrow |\Phi| \ll 1$$

A aceleração gravítica medida nas estações  $-l_1$  e  $l_2$  é  $g = -\left(1 - b/r\right)^{1/2} \Phi' \cong -\Phi'$  e é menor ou igual à aceleração gravítica terrestre, i.e.,  $g \leq g_{\oplus}$ .

Resumindo, as condições impostas são:  $b/r \ll 1$ ,  $|\Phi| \ll 1$  e  $|\Phi'| \leq g_{\oplus}$  em  $l=-l_1$  e  $l=+l_2$ . Atendendo à condição de que  $|\Phi| \ll 1$ , o tempo próprio nas estações é igual à coordenada temporal da métrica  $t$ .

## 2.5.2 Condições impostas a uma travessia

De modo a considerar uma viagem conveniente para seres humanos através do wormhole, é preciso impor três condições:

- (i) A viagem deve demorar pouco tempo, digamos menos do que um ano, quer para o viajante quer para os observadores nas estações  $-l_1$  e  $+l_2$ .

$$\Delta\tau = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{v\gamma} \leq 1 \text{ ano} \tag{2.9}$$

$$\Delta t = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{ve^{\Phi}} \leq 1 \text{ ano}$$

- (ii) A aceleração sentida pelo viajante não deve exceder  $g_{\oplus}$  (a aceleração gravítica terrestre). Localmente, podemos introduzir uma base ortonormada no referencial próprio do viajante,

$(\vec{e}_{\hat{0}}, \vec{e}_{\hat{1}}, \vec{e}_{\hat{2}}, \vec{e}_{\hat{3}})$ , definida em termos da base ortonormada dos observadores estáticos,

$(\vec{e}_{\hat{r}}, \vec{e}_{\hat{\phi}}, \vec{e}_{\hat{\theta}}, \vec{e}_{\hat{\phi}})$ , pela transformação de Lorentz  $\vec{e}_{\hat{\mu}'} = \Lambda^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu}'} \vec{e}_{\hat{\nu}}$ :

$$\begin{cases} \vec{e}_{\hat{0}'} = \vec{U} = \gamma \vec{e}_{\hat{t}} + \mp \gamma \beta \vec{e}_{\hat{r}} \\ \vec{e}_{\hat{1}'} = \mp \gamma \vec{e}_{\hat{r}} + \gamma \beta \vec{e}_{\hat{t}} \\ \vec{e}_{\hat{2}'} = \vec{e}_{\hat{\theta}} \\ \vec{e}_{\hat{3}'} = \vec{e}_{\hat{\phi}} \end{cases} \quad \text{com} \quad (\Lambda^{\hat{\nu}}_{\hat{\mu}'}) = \begin{pmatrix} \gamma & \mp \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \mp \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{U} = \vec{e}_{\hat{0}'}$  é o quadri-vector velocidade do viajante. O quadri-vector aceleração deste é  $a_{\hat{\alpha}'} = U_{\hat{\alpha}';\hat{\beta}'} U^{\hat{\beta}'}$ . Visto que o quadri-vector aceleração é ortogonal ao quadri-vector velocidade,

temos  $\vec{a} \cdot \vec{U} = 0 = \vec{a} \cdot \vec{e}_{\hat{0}} = a_{\hat{0}} = -a^{\hat{0}} = 0$ . Como o viajante se move radialmente, a sua aceleração tem apenas uma componente radial, i.e.,  $a_{\hat{2}} = a_{\hat{3}} = 0$  e  $\vec{a} = a \vec{e}_{\hat{1}}$ , em que  $a$  é a intensidade da aceleração. Para determinar  $a$ , consideremos que  $U_\alpha$  é uma função da posição radial,  $r$ , do viajante; calcular  $a_t = U_{t;\alpha} U^\alpha = U_{t,r} U^r - \Gamma^{\beta}_{t\alpha} U^\alpha U_\beta$  nas coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ ; e notar que  $a_t = \vec{a} \cdot \vec{e}_t = (a \vec{e}_{\hat{1}}) \cdot \vec{e}_t = -\gamma \beta e^\Phi a$ . O resultado final é:

$$a = \mp \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{1/2} e^{-\Phi} (\gamma e^\Phi)' = e^{-\Phi} \frac{d(\gamma e^\Phi)}{dl}$$

A condição de que o viajante sente uma aceleração menor ou igual à aceleração gravítica terrestre é dada por:

$$|a| = \left| e^{-\Phi} \frac{d(\gamma e^\Phi)}{dl} \right| \leq g_\oplus \Leftrightarrow \left| e^{-\Phi} \frac{d(\gamma e^\Phi)}{dl} \right| \leq g_\oplus \quad (2.10)$$

(iii) As acelerações de maré,  $\Delta \vec{a}$ , entre as várias partes do corpo do viajante não deverão exceder a aceleração gravítica terrestre  $g_\oplus$ . Designemos por  $\vec{\xi}$  a separação vectorial entre duas partes do corpo do viajante (ex. a separação entre a cabeça e os pés).  $\vec{\xi}$  é puramente espacial no referencial próprio do viajante, i.e.,  $\vec{\xi} \cdot \vec{U} = 0 = -\xi^{\hat{0}}$ , em que  $\vec{U}$  é o quadri-vector velocidade do viajante.

A aceleração de maré entre duas partes do corpo do viajante é dada por [1, Box 37.1]:  $\Delta a^{\hat{\alpha}} = -R^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}'\hat{\gamma}'\hat{\delta}'} U^{\hat{\beta}'} \xi^{\hat{\gamma}'} U^{\hat{\delta}'}$ , em que  $R^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}'\hat{\gamma}'\hat{\delta}'}$  são as componentes do tensor de Riemann. Visto que  $U^{\hat{\alpha}} = \delta^{\hat{\alpha}}_{\hat{0}}$  e  $\xi^{\hat{0}} = 0$  no referencial do viajante e atendendo ao carácter antisimétrico nos dois primeiros índices de  $R^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}'\hat{\gamma}'\hat{\delta}'}$ ,  $\Delta a^{\hat{\alpha}}$  é puramente espacial com as seguintes componentes:

$$\Delta a^{\hat{j}'} = -R^{\hat{j}'}_{\hat{0}'\hat{k}'\hat{0}'} \xi^{\hat{k}'} = -R_{\hat{j}'\hat{0}'\hat{k}'\hat{0}'} \xi^{\hat{k}'}$$

Transformando as componentes do tensor de Riemann do referencial dos observadores estáticos  $(\vec{e}_{\hat{t}}, \vec{e}_{\hat{r}}, \vec{e}_{\hat{\theta}}, \vec{e}_{\hat{\phi}})$  para o referencial do viajante  $(\vec{e}_{\hat{0}'}, \vec{e}_{\hat{1}'}, \vec{e}_{\hat{2}'}, \vec{e}_{\hat{3}'})$ , através de uma transformação de Lorentz, vem:

$$R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'} = R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[ -\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)} \Phi' - (\Phi')^2 \right]$$

$$R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'} = R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'} = \gamma^2 R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}} + \gamma^2 \beta^2 R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}} = \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[ \beta^2 \left( b' - \frac{b}{r} \right) + 2(r-b)\Phi' \right]$$

Como essas são as únicas componentes não-nulas de  $R_{\hat{j}'\hat{0}'\hat{k}'\hat{0}'}$  no referencial do viajante, as acelerações de maré tomam as seguintes formas:

$$\begin{cases} \Delta a^{\hat{1}'} = -R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'} \xi^{\hat{1}'} \\ \Delta a^{\hat{2}'} = -R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'} \xi^{\hat{2}'} \\ \Delta a^{\hat{3}'} = -R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'} \xi^{\hat{3}'} \end{cases}$$

Suponhamos que  $|\xi| \approx 2m$  (a altura do viajante), com  $\xi$  orientado ao longo de qualquer direcção espacial do referencial do viajante tal que  $|\Delta \vec{a}| \leq g_{\oplus}$ . Logo, temos as seguintes restrições:

$$\left| R_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}\hat{0}} \right| = \left| \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \left( -\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)} \Phi' - (\Phi')^2 \right) \right| \leq \frac{g_{\oplus}}{2m} \cong \frac{1}{(10^8 m)^2} \quad (2.11)$$

$$\left| R_{\hat{2}\hat{0}\hat{2}\hat{0}} \right| = \left| \left( \frac{\gamma^2}{2r^2} \right) \left[ \left( b' - \frac{b}{r} \right) \beta^2 + 2(r-b)\Phi' \right] \right| \leq \frac{g_{\oplus}}{2m} \cong \frac{1}{(10^8 m)^2} \quad (2.12)$$

A equação (2.11) pode ser considerada a restrição imposta ao coeficiente  $\Phi$ . A restrição é facilmente satisfeita considerando  $\Phi' = 0$  em todos os pontos do espaço-tempo. A equação (2.12) pode ser considerada a restrição imposta à velocidade,  $v$ , do viajante ao atravessar o wormhole.

É útil comparar as componentes da aceleração relativa com as componentes de Schwarzschild:

$$\begin{aligned} (\Delta a)_{\parallel} &= + \frac{2GM}{r^3} \xi_{\parallel} \\ (\Delta a)_{\perp} &= - \frac{GM}{r^3} \xi_{\perp} \end{aligned}$$

Verifica-se que um buraco negro de Schwarzschild de pequenas dimensões, da ordem de  $2GM < 10^8 m$  e  $M < 10^5 M_{Sol}$ , esmagará um viajante antes de este atingir a singularidade central.

## 2.6 O Tensor de energia-momento do wormhole

### 2.6.1 Restrições impostas à tensão e à densidade de energia na garganta do wormhole

As restrições impostas à função de forma,  $b(r)$ , do wormhole implicam que através das equações de campo de Einstein (2.4)-(2.6) existem restrições das densidade de massa-energia,  $\rho$ , da tensão radial,  $\tau$ , e da pressão lateral,  $p$ , que geram a curvatura espacio-temporal. As restrições mais severas ocorrem na garganta do wormhole. O facto de que  $r=b=b_0$  e  $(r-b)\Phi' \rightarrow 0$  na garganta (pois  $b'$  é finito através da eq.(2.4)), e devido à ausência do horizonte (pois  $\Phi$  é finito) implica, através da equação de campo (2.5), que:

$$\tau_0 (\text{tensão radial na garganta}) \cong \frac{1}{8\pi G b_0^2} \approx 5 \times 10^{40} \frac{N}{m^2} \left( \frac{10m}{b_0} \right)^2$$

o que é uma tensão enorme. Se  $b_0 \approx 3km$ ,  $\tau_0$  é da ordem de  $10^{37} N/m^2$ , o que é a pressão no centro das maiores estrelas de neutrões.

Para analisar as tensões na garganta e a sua vizinhança definimos a seguinte função adimensional, que designaremos por função de *exoticidade*, utilizando as equações de campo (2.4) e (2.5) e substituindo as funções  $\tau$  e  $\rho$  pelas funções  $b$  e  $\Phi$ :

$$\zeta \equiv \frac{\tau - \rho}{|\rho|} = \frac{(b/r) - b' - 2(r-b)\Phi'}{|b|} \quad (2.13)$$

A condição de que o wormhole liga dois espaços-tempo assintoticamente planos implica que a superfície de mergulho na garganta obedece a uma condição de espalhamento. Matematicamente, a condição de espalhamento na garganta significa que o inverso da função de mergulho,  $r=r(z)$  satisfaça  $d^2r/dz^2 > 0$  na vizinhança da garganta,  $r=b$ . Para analisar as consequências dessa restrição, utiliza-se:

$$\frac{dr}{dz} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{1/2}$$

Diferenciando em ordem a  $z$ , obtém-se uma versão de espalhamento:

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \quad (2.14)$$

na garganta ou na sua vizinhança.

Uma segunda versão obtém-se combinando (2.13) e (2.14). Podemos redefinir  $\zeta$  para qualquer valor da coordenada radial,  $r$ :

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|} \left( \frac{d^2r}{dz^2} \right) - 2(r-b) \frac{\Phi'}{|b'|}$$

Esta relação, com o carácter finito de  $b'$  (atendendo à eq.(2.4)) e o facto de que  $(r-b)\Phi' \rightarrow 0$  se verifica na garganta, possibilita-nos escrever a condição de espalhamento (2.14) como:

$$\zeta = \frac{\tau_0 - \rho_0}{|\rho_0|} > 0 \quad \text{em } r = b = b_0$$

na garganta ou nas suas vizinhanças.

## 2.6.2 Matéria “exótica”

A condição  $\tau_0 > \rho_0$  é bastante problemática, pois estipula que a tensão radial na garganta exceda a densidade de massa-energia,  $\rho_0$ . À matéria que goza dessa propriedade,  $\tau_0 > \rho_0 > 0$ , designaremos por *matéria exótica*.

A natureza exótica dessa matéria,  $\tau_0 > \rho_0 > 0$ , é especialmente problemática devido às implicações para as medições efectuadas por observadores que se movem através da garganta com uma velocidade radial próxima da velocidade da luz, i.e.,  $\gamma \gg 1$ . Um tal observador medirá uma densidade de massa-energia (a projecção do tensor energia-momento, eq.(2.3), com o seu vector de base temporal,  $\vec{e}_{\hat{0}'} = \gamma \vec{e}_{\hat{t}} + \gamma \beta \vec{e}_{\hat{r}}$ ) dada por:

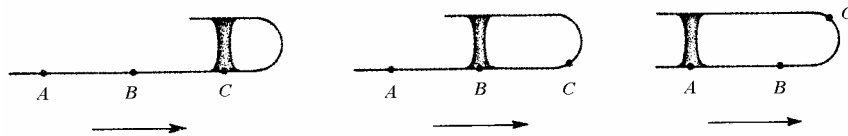
$$\begin{aligned} T_{\hat{0}'\hat{0}'} &= \gamma^2 T_{\hat{t}\hat{t}} + 2\gamma^2 \beta^2 T_{\hat{t}\hat{r}} + \gamma^2 \beta^2 T_{\hat{r}\hat{r}} \\ &= \gamma^2 (\rho_0 - \beta^2 \tau_0) = \gamma^2 (\rho_0 - \tau_0) + \tau_0 \end{aligned}$$

Se a velocidade for suficientemente elevada, o viajante observará uma densidade de massa-energia negativa,  $\rho < 0$ . É possível provar que qualquer wormhole não-estático e que não goza da propriedade de simetria esférica, é constituído por matéria cuja densidade de energia é negativa, medida por determinados observadores. Uma análise qualitativa é a seguinte: Um feixe luminoso (geodésicas nulas) que entra numa boca e emerge na outra, tem uma área de secção eficaz que inicialmente diminui, depois aumenta ao atravessar a garganta. A conversão do decréscimo para o acréscimo da área da secção eficaz apenas pode ser produzida pela repulsão gravitacional da matéria que constitui o wormhole, o que corresponde à existência de densidades de massa-energia negativas.

A desigualdade  $\tau > \rho$  viola algumas condições de energia, nomeadamente, as condições de energia nula, fraca, forte e dominante que são as bases fundamentais para alguns teoremas importantes. Mas existem campos quânticos em que o valor de expectação renormalizado do tensor de energia-momento viola todas as condições de energia. Logo, não devemos impor, sem alguma cautela, a impossibilidade da existência de matéria exótica. É possível que as leis fundamentais da física proibam a existência da matéria exótica à escala macroscópica necessária para a construção de wormholes. Mas é importante salientar que as actuais considerações de  $\tau/\rho \geq 1$  a nível macroscópico também serão superadas quando tivermos uma maior e melhor compreensão das leis da física, nomeadamente uma teoria da gravitação quântica.

## 2.7 Uma viagem interestelar hiper-rápida utilizando um wormhole

Suponhamos que temos um *wormhole* com um túnel extremamente curto e com ambas as bocas, em repouso, próximas da Terra. Suponhamos, também, que podemos mover qualquer das bocas sem modificar a geometria interna do túnel.



**fig.5.7** O comprimento do túnel do wormhole mantém-se fixo, enquanto que as duas bocas estão animadas com um movimento relativo no universo exterior. Cada figura representa um diagrama de imersão de um wormhole. Relativamente ao hiperespaço, a parte inferior do universo desliza para a direita, enquanto que o wormhole na parte superior mantém-se em repouso

Um observador, a bordo de uma nave, efectua uma viagem até Deneb com uma das bocas a uma velocidade muito próxima da da luz. Seja  $\Delta\tau$  o intervalo de tempo decorrido nessa viagem. Durante a mesma, relógios que se encontrem em repouso nas respectivas bocas permanecerão sincronizados, tal como observado no interior do *wormhole*, pois o túnel mantém-se fixo. Uma vez chegado a Deneb, se o observador regressar imediatamente à Terra através do *wormhole*, então o tempo de *ida e volta* será dado por  $\Delta\tau_i \approx \Delta\tau$ . Temos, aqui, uma viagem superluminal, pois  $|\Delta t_i| < 2D$ . Uma vez estabelecido este posicionamento das respectivas bocas, uma em Deneb e outra na Terra, será possível efectuar viagens praticamente instantâneas entre estes dois pontos, com  $\Delta\tau \approx 0$ , devido ao túnel extremamente curto do wormhole.

### 3. Warp Drive

Alcubierre demonstrou [5], através de uma modificação do espaço-tempo, que é possível atingir velocidades arbitrariamente elevadas. Estas velocidades poderão superar a velocidade da luz apesar dos observadores estarem contidos nos seus cones de luz [6]. A enorme velocidade de separação advém da expansão do próprio espaço-tempo, tal como ocorre na fase inflacionária do universo.

Poderíamos utilizar uma expansão do espaço-tempo para nos afastarmos de um objecto a uma velocidade arbitrariamente elevada. De modo análogo, uma contracção do espaço-tempo aproximarnos-ia de um objecto. É esta a base do modelo de Alcubierre para viagens interestelares hiper-rápidas. O modelo consiste em criar uma distorção local do espaço-tempo que produz uma expansão na parte traseira da nave espacial, e uma contracção na parte frontal. Deste modo a nave será afastada da Terra e aproximada de um destino distante pelo próprio espaço-tempo.

#### 3.1 A métrica

O espaço-tempo, no formalismo 3+1 da Relatividade Geral [1], é descrito por uma folheação de hipersuperfícies espaciais com uma coordenada temporal constante. A geometria do espaço-tempo é dada em termos da: métrica tri-dimensional,  $g_{ij}$ , das hipersuperfícies espaciais; função de lapso,  $\alpha$ , que fornece o intervalo de tempo próprio entre hipersuperfícies vizinhas, tal como medido por observadores Eulerianos<sup>3</sup>; um vector *shift*,  $\beta^i$ , que relaciona sistemas de coordenadas espaciais em hipersuperfícies diferentes. Atendendo a essas condições, a métrica do espaço-tempo é dada por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= -(\alpha^2 - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

Suponhamos que a nave espacial move-se ao longo do eixo do  $\theta x$  num sistema de coordenadas cartesiano. A métrica que “empurra” uma nave espacial ao longo desta trajectória, descrita por uma função arbitrária do tempo,  $x_s(t)$ , tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta^x &= -v_s(t) f(r_s(t)) \\ \beta^y &= \beta^z = 0 \\ g_{ij} &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que:

$$\begin{aligned} v_s(t) &= \frac{dx_s(t)}{dt} \\ r_s(t) &= \left[ (x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

e a função  $f$ , que por vezes designaremos por “função de forma”, é dada por:

$$f(r_s) = \frac{\text{tgh}(\sigma(r_s + R)) - \text{tgh}(\sigma(r_s - R))}{2 \text{tgh}(\sigma R)} \tag{3.2}$$

em que  $R > 0$  e  $\sigma > 0$  são parâmetros arbitrários. Note-se que para elevados valores de  $\sigma$  a função  $f(r)$  aproxima-se de uma função “chapéu”:

<sup>3</sup> Um observador Euleriano tem uma quadri-velocidade normal à hipersuperfície.



$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(r_s) = \begin{cases} 1 & \text{se } r_s \in [-R, R] \\ 0 & \text{se } r_s \notin [-R, R] \end{cases}$$

Na fig.3.1 está representada a função de forma, com  $\sigma=2$  e  $R=6$ :

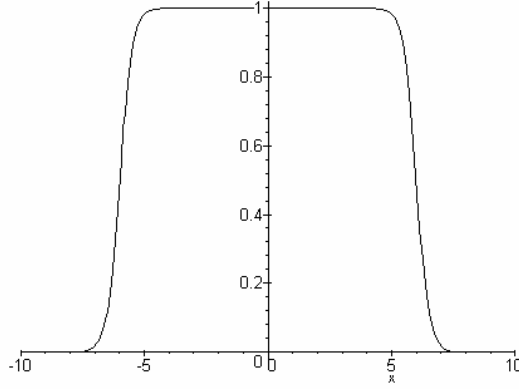


fig.3.1 A função de forma de Alcubierre com  $\sigma=2$  e  $R=6$ .

Qualquer forma da função  $f(r)$  é suficiente desde que tenha um valor aproximadamente igual a um numa região  $r_s < R$ , e atinge rapidamente o zero no exterior da bolha, de modo que, no limite,  $r_s \rightarrow \infty$ , se recupera o espaço-tempo de Minkowski.

A métrica simplifica-se para:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(dx - v_s(t) f(r_s(t)) dt\right)^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.3)$$

Atendendo à relação (3.1) verifica-se que a geometria tri-dimensional das hipersuperfícies é plana. A relação  $\alpha=1$ , implica que as curvas temporais normais às hipersuperfícies são geodésicas, i.e., os observadores Eulerianos estão em queda livre. Todavia, visto que o vector de *shift* anula-se para  $r_s \gg R$ , o espaço-tempo é essencialmente plano excepto numa região com um raio de  $R$  centrado em  $(x_s(t), 0, 0)$ . O espaço-tempo também é plano no interior da bolha, na região em que  $f(r_s(t))=1$ , visto que um referencial de inércia local é obtido através da seguinte transformação:  $x' = x - x_s(t)$ . Logo, um objecto comóvel com o centro da bolha, cuja trajectória seja dada por  $x' = 0$ , encontra-se em queda livre<sup>4</sup>.

### 3.2 A curvatura extrínseca e a expansão

A informação do espaço-tempo está contida no tensor de curvatura extrínseca,  $K_{ij}$ , que descreve o modo como as hipersuperfícies tri-dimensionais são imersas no espaço-tempo quadri-dimensional [1]:

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha} \left( \beta_{j|i} + \beta_{i|j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right)$$

<sup>4</sup> Aplicando uma transformação  $x' = x - x_s(t)$  e substituindo na eq. (3.3), a métrica toma a seguinte forma:  $ds^2 = -dt^2 + dx'^2 + dy^2 + dz^2$ . Temos um referencial de inércia local, logo, um objecto que se move com o centro da bolha, cuja trajectória é dada por  $x'=0$ , estará em queda livre.

e atendendo à forma de  $\alpha$  e  $g_{ij}$ , reduz-se a:

$$K_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i \beta_j + \partial_j \beta_i)$$

A expansão,  $\theta$ , dos elementos de volume associado aos observadores Eulerianos é dada em termos de  $K_{ij}$ :

$$\theta = -\alpha \text{Tr} K = v_s \frac{x_s}{r_s} \frac{df}{dr_s}$$

A figura representa o gráfico de  $\theta$  em função de  $x$  e de  $\rho = (y^2 + z^2)^{1/2}$ , no caso particular em que  $\sigma=2$  e  $R=4$  e  $v_s=1$ . O centro de perturbação corresponde à posição da nave,  $x_s(t)$ . Verifica-se que os elementos de volume estão em expansão na traseira da nave, e em contracção na parte frontal.

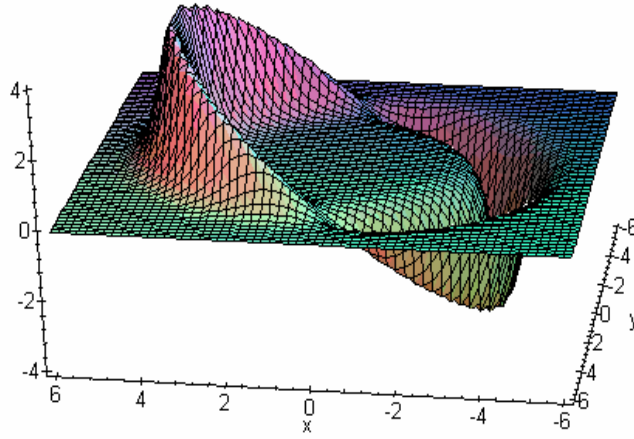


fig.3.2 Expansão dos elementos de volume da bolha de Alcubierre.

Para provar que a trajectória da nave é realmente uma curva temporal, independentemente do valor de  $v_s(t)$ , substituímos  $x=x_s(t)$  em (3.3), logo:

$$d\tau=dt \tag{3.4}$$

atendendo a  $v_s(t) = dx_s(t)/dt$  e à eq.(3.2). A relação (3.4) implica que o tempo próprio iguala ao tempo das coordenadas. Visto que a coordenada temporal,  $t$ , iguala ao tempo próprio de observadores distantes, na região plana do espaço-tempo, concluímos que a nave espacial não sofre qualquer dilatação do tempo, apesar do seu movimento. É possível provar que as forças de maré na vizinhança imediata da nave são desprezáveis, enquanto que na região  $r_s=R$  são enormes.

### 3.3 Viagens interestelares hiper-rápidas

Para demonstrarmos que é possível efectuar uma viagem de ida e volta a uma estrela distante num intervalo de tempo arbitrariamente pequeno, consideremos o seguinte cenário. Duas estrelas,  $A$  e  $B$ , estão separadas por uma distância de  $D$  no espaço-tempo plano. No intervalo  $t_0$ , a nave inicia o seu movimento utilizando os motores, afastando-se de  $A$  a uma velocidade de  $v<1$ . A uma distância  $d$  de  $A$  a nave efectua uma paragem. Suponhamos que:

$$R \ll d \ll D \quad (3.5)$$

É neste instante que a perturbação do espaço-tempo, centrada na posição da nave, se inicia. A perturbação é tal que empurra a nave de  $A$  com uma aceleração de coordenadas que varia rapidamente de zero a um valor constante de  $a$ . A meio caminho entre  $A$  e  $B$ , a perturbação é modificada de modo que a aceleração varia rapidamente de  $a$  a  $-a$ . A nave finalmente encontrar-se-á em repouso a uma distância  $d$  de  $B$ , em que a perturbação desaparecerá. A nave efectua um movimento até  $B$  com uma velocidade  $v$ . A viagem de retorno a  $A$  efectua-se de um modo análogo.

Se as variações de aceleração são extremamente rápidas, o tempo de coordenadas total,  $T$ , decorrido apenas na ida é dado por:

$$T = 2 \left( \frac{d}{v} + \sqrt{\frac{D-2d}{a}} \right)$$

O tempo próprio de ambas as estrelas iguala o tempo das coordenadas, porque estas se encontram no espaço-tempo plano. O tempo próprio medido na nave é dado por:

$$\tau = 2 \left( \frac{d}{\gamma v} + \sqrt{\frac{D-2d}{a}} \right)$$

com  $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$ . A dilatação do tempo apenas surge na ausência da perturbação do espaço-tempo, na altura em que a nave se move com os seus motores ligados.

Atendendo à eq. (3.5), vem:

$$\tau \approx T \approx 2 \sqrt{\frac{D}{a}}$$

Verifica-se que  $T$  diminui com o acréscimo de  $a$ . A nave poderá viajar mais rapidamente do que a velocidade da luz. No entanto, como já se verificou, esta mantém-se numa trajectória temporal, contida no seu cone de luz, pois a própria luz também sofre a mesma distorção do espaço-tempo. Daí a denominação de “*warp drive*” do mecanismo.

### 3.4 A densidade de energia

Verifica-se que a métrica descrita acima, utilizando as equações de Einstein viola todas as condições de energia [7, 8]. Utilizando as quadri-velocidades dos observadores Eulerianos:

$$U^\mu = \frac{1}{\alpha} (1, -\beta^i), \quad U_\mu = -(\alpha, 0)$$

a densidade de energia observada por estes será:

$$T^{\mu\nu} U_\mu U_\nu = \alpha^2 T^{00} = \frac{1}{8\pi G} G^{00} = -\frac{1}{8\pi G} \frac{v_s^2 \rho^2}{4r_s^2} \left( \frac{df}{dr_s} \right)^2 \quad (3.6)$$

em que  $\rho = (y^2 + z^2)^{1/2}$  é a distância radial perpendicular ao eixo  $0x$ , tal como definido acima. Na fig.3.3, verifica-se que a distribuição de energia negativa está concentrada numa região toroidal perpendicular à direcção do movimento.

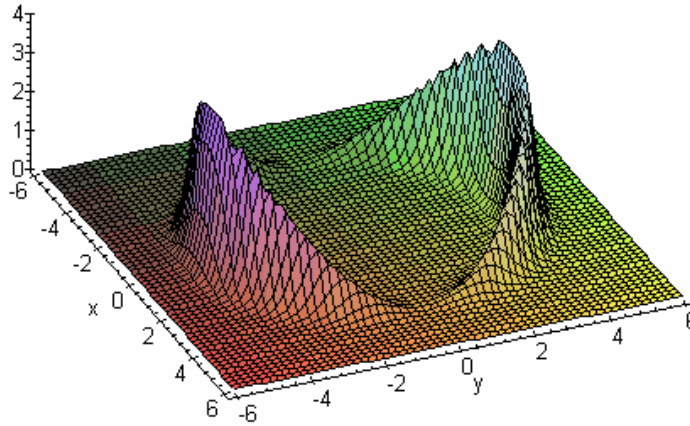


fig.3.3 Distribuição da energia negativa numa região perpendicular à direcção do movimento.

### 3.5 Análise de Krasnikov

Krasnikov levantou uma questão interessante no tocante às viagens superluminares segundo o mecanismo proposto por Alcubierre [9]. O ponto fundamental é que um observador não poderá influenciar acontecimentos no exterior do seu cone de luz do futuro. Em particular, isto significa que um astronauta a bordo de uma nave não poderá criar nem controlar uma bolha de Alcubierre, que se move com  $v > c$ , em torno dessa nave. Esta conclusão advém do seguinte argumento: os pontos assentes na parte exterior frontal da bolha têm uma separação espacial em relação ao centro da mesma. Verifica-se esta afirmação considerando a trajectória de um fóton emitido a partir da nave na direcção positiva do eixo  $0x$  [10]. Temos, então,  $ds^2 = dy = dz = 0$  e a métrica toma a seguinte forma:

$$ds^2 = 0 = -dt^2 + \left(dx - v_s f(r_s) dt\right)^2$$

donde vem:

$$\frac{dx}{dt} = v_s f(r_s) + 1.$$

Ao fazer uma análise no próprio referencial de um observador que se desloca no centro da bolha, efectuando a transformação  $x' = x - x_s(t)$ , a métrica da eq. (3.3) toma a seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + \left(dx' + \left(1 - f(r_s)\right)v_s dt\right)^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.7)$$

Considerando uma curva nula, teremos:

$$\frac{dx'}{dt} = 1 - (1 - f)v_s.$$

Se a nave se encontra em repouso no centro da bolha, então o fóton apresenta, inicialmente,  $dx/dt=v+1$  ou  $dx'/dt=1$ . Esta última condição verifica-se porque as novas coordenadas definem, localmente, um referencial de inércia. No entanto, num dado ponto  $x' = x'_c$ , com  $x'_c < R$ , tal que  $0 < f < 1$ , verifica-se que  $dx/dt=v$  ou  $dx'/dt=0$ . Se  $dx/dt=v+1$  no centro da bolha, temos, por continuidade,  $dx/dt=v$  para alguns fótons que se movem na direcção  $+x$  no interior da bolha e  $dx/dt=1$  na região exterior à bolha. Isto implica que os fótons que atingem o ponto  $x'_c$  permanecem em repouso relativamente à bolha e são simplesmente arrastados por esta. Os fótons emitidos no sentido positivo do eixo  $0x$ , nunca chegam à superfície exterior da bolha, a qual, por esta razão, se encontra no exterior do cone de luz do futuro da nave. Logo, a bolha não poderá ser criada nem controlada por qualquer acção da tripulação da nave, excluindo a utilização de sinais taquiónicos.

Esta análise não significa que uma bolha de Alcubierre, se fosse possível a sua criação, não pudesse ser utilizada como um meio de transporte superluminal. Apenas significa que as acções necessárias para a modificação da métrica, e a conseqüente criação da bolha, têm que ser realizadas por um observador, cujo cone de luz inclui a trajectória da bolha. A fim de efectuar viagens super-luminais, uma nave colocada apropriadamente no caminho da trajectória da bolha entraria no seu interior, permanecendo em repouso, sendo depois arrastada até ao seu destino final. No entanto, Krasnikov propôs uma nova métrica, em que um observador a bordo duma nave consegue efectuar uma viagem de *ida e volta*, pelas suas próprias acções, num tempo arbitrariamente curto, medido por observadores distantes. Esta métrica será apresentada e analisada no próximo capítulo.

## 4. Um Metropolitano Superluminal: o Tubo de Krasnikov

A métrica do *warp drive*, proposta por Alcubierre, apresenta o problema de um observador no centro da bolha que se encontra causalmente separado da parte externa da superfície da mesma. Logo, um tal observador não conseguirá controlar a bolha depois da sua criação.

A métrica bi-dimensional originalmente proposta por Krasnikov não sofre desse problema [9]. Esta métrica tem a propriedade interessante do tempo de uma viagem completa de *ida e volta* a uma estrela distante, tal como ele é medido por relógios terrestres, poder ser arbitrariamente curto, embora o tempo de ida não possa ser diminuído.

Na generalização quadri-dimensional de Everett e Roman [10], é construído um “tubo” ao longo da trajectória de uma nave que liga a Terra à estrela distante. No interior do tubo, o espaço-tempo é plano, mas os cones de luz estão suficientemente inclinados para permitir uma viagem superluminal num único sentido. Verifica-se que os tubos de Krasnikov, tal como as bolhas do *warp drive* e os *wormholes* transitáveis, envolvem densidades de energia negativa.

Apesar das suas diferenças, as métricas de Alcubierre e de Krasnikov têm em comum algumas propriedades importantes. Em particular, ambas implicam a existência de curvas temporais fechadas e os tensores de energia-momento respectivos violam a condição de energia fraca (WEC).

### 4.1 A métrica bi-dimensional

Krasnikov propôs uma nova métrica bi-dimensional, em que se torna possível a um observador, manipulando o espaço-tempo, efectuar uma viagem de ida e volta num intervalo de tempo arbitrariamente curto, dada por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dt - dx)(dt + k(x, t)dx) \\ &= -dt^2 + (1 - k(x, t))dxdt + k(x, t)dx^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

com

$$k(x, t) \equiv 1 - (2 - \delta)\theta_\varepsilon(t - x)[\theta_\varepsilon(x) - \theta_\varepsilon(x + \varepsilon - D)]. \quad (4.2)$$

$\theta_\varepsilon$  é uma função monótona e suave que satisfaz:

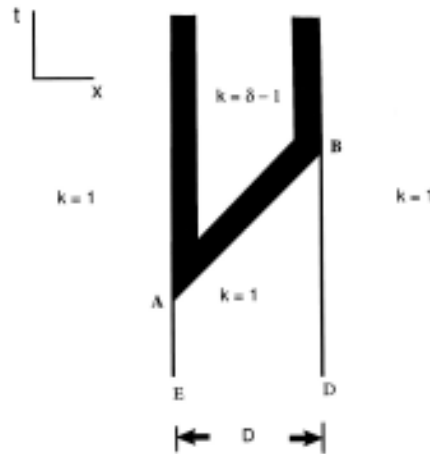
$$\theta_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi > \varepsilon \\ 0 & \text{se } \xi < 0 \end{cases}$$

em que  $\delta$  e  $\varepsilon$  são parâmetros positivos arbitrariamente pequenos. A métrica reduz-se à métrica bi-dimensional de Minkowski se  $k=1$ . As duas funções  $\theta_\varepsilon$  entre parêntesis rectos anulam-se para  $x < 0$  e cancelam-se se  $x > D$ , assegurando  $k=1$  para qualquer  $t$ , excepto os valores compreendidos entre  $x=0$  e  $x=D$ . Quando se combina este comportamento com o efeito do factor  $\theta_\varepsilon(t-x)$ , verifica-se que a métrica da eq.(4.1) se reduz ao espaço-tempo de Minkowski para  $t < 0$ , e quaisquer valores de  $t$  no exterior de  $0 < x < D$ . Para  $t > x$  e  $\varepsilon < x < D - \varepsilon$ , as primeiras duas funções  $\theta_\varepsilon$  na eq.(4.2) igualam-se à unidade, enquanto  $\theta_\varepsilon(x + \varepsilon - D) = 0$ , e conseqüentemente,  $k = \delta - 1$  na região considerada. Existem duas fronteiras espaciais entre estas duas regiões, com  $k$  constante; uma entre  $x=0$  e  $x=\varepsilon$  para  $t > 0$ , e a outra entre  $x=D - \varepsilon$  e  $x=D$  para  $t > D$ .

## 4.2 As propriedades da métrica

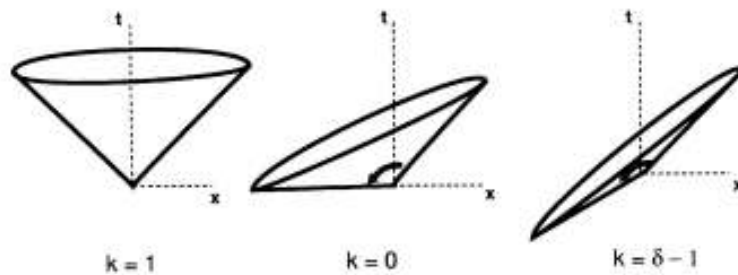
Imaginemos que esta métrica é produzida pela tripulação de uma nave que parte da Terra ( $x=0$ ) em  $t=0$ , e viaja ao longo do eixo  $0x$  para Deneb ( $x=D$ ), com uma velocidade aproximadamente igual à da luz, de modo que o tempo de chegada seja  $t \approx D$ . A tripulação pode modificar a métrica, alterando o valor de  $k$  de 1 para  $\delta-1$  ao longo do eixo  $0x$ , na região compreendida entre  $x=0$  e  $x=D$ , deixando uma região de transição de largura  $\varepsilon$  em cada extremidade, para assegurar a continuidade. A continuidade no tempo implica também que a modificação de  $k$  requeira um intervalo finito de tempo, cuja duração assumimos ser  $\varepsilon$ , por simplicidade. No entanto, visto que a fronteira do cone de luz do futuro da nave, situada em  $t=0$ , é dada por  $|x|=t$ , um observador não pode modificar a métrica em  $x$  antes do instante  $t=x$ . Esta análise justifica a presença do factor  $\theta_\varepsilon(t-x)$  na métrica. Logo, existe uma região de transição temporal entre os dois valores de  $k$ , com a duração de  $\varepsilon$ , ao longo da linha de universo da nave, dada por  $x \approx t$ .

A geometria resultante no plano  $(x,t)$  está indicada na fig.4.1, na qual as regiões sombreadas representam as duas regiões de transição espacial  $0 < x < \varepsilon$  e  $D - \varepsilon < x < D$ , e a região de transição temporal  $x < t < x + \varepsilon$ . Na região interior do diagrama,  $k$  tem o valor constante de  $\delta-1$ , enquanto que  $k=1$  nas regiões exteriores. A linha de universo da nave está representada pela recta  $AB$ .



**fig.4.1** O espaço-tempo de Krasnikov representado no plano. As linhas verticais  $E$  e  $D$  são as linhas de universo da Terra e de Deneb, respectivamente. A linha de universo da nave é aproximadamente representada pela curva  $AB$ .

As propriedades da métrica modificada com  $\delta-1 \leq k \leq 1$  podem ser analisadas pela forma factorizada da eq.(4.1) para curvas nulas,  $ds^2 = 0$ . Os declives do cone de luz do futuro são  $dt/dx = 1$  e  $dt/dx = -k$ . O comportamento do cone de luz está indicado na fig.4.2, com  $k=1$ ,  $k=0$  e  $k=\delta-1$ .



**fig.4.2** Os cones de luz do futuro para  $k=1$ ,  $k=0$ ,  $k=\delta-1$ , respectivamente.

Verifica-se que na região interior da fig.4.1, onde  $k=\delta-1$ , o espaço-tempo é plano, visto que a métrica dada pela eq.(4.1) pode ser reduzida à de Minkowski pelas seguintes transformações de coordenadas:

$$\begin{aligned} dt' &= dt + \left(\frac{\delta}{2} - 1\right) dx \\ dx' &= \left(\frac{\delta}{2}\right) dx \end{aligned} \quad (4.3)$$

Note-se que a ramificação da esquerda na região interior é dada por  $dx'/dt' = -1$ . A transformação é singular em  $\delta=0$ , i. e.,  $k=-1$ .

Das equações (4.3) obtemos:

$$\frac{dt}{dt'} = 1 + \left(\frac{2-\delta}{\delta}\right) \frac{dx'}{dt'} \quad (4.4)$$

Para um objecto que se propague no interior do seu cone de luz do futuro, teremos  $|dx'/dt'| < 1$  e  $dt' > 0$ . Se  $0 < \delta \leq 2$ , um tal objecto propaga-se no sentido positivo de  $x'$  (e de  $x$ ), verificando-se que  $dt > 0$ . No entanto, para  $\delta < 1$ , um objecto que se mova suficientemente próximo da ramificação esquerda do cone de luz, dada por  $dx'/dt' = -1$ , verifica-se  $dt/dt' < 0$  e consequentemente, ele aparenta uma propagação para trás no tempo, tal como é medida por observadores na região exterior, com  $\delta=2$  e  $k=1$ , da fig.4.1. Estas propriedades de movimento, na métrica de Krasnikov, com  $\delta < 1$ , podem ser deduzidas a partir dos cones de luz da fig.4.2.

### **4.3 Uma viagem superluminal entre a Terra e Deneb**

Imaginemos que a nave, que partiu da Terra e chegou a Deneb no instante  $t \approx D$ , tenha modificado a métrica de modo que  $k \approx -1$  (i.e.  $\delta \approx 0$ ) ao longo da sua trajectória. Imaginemos, agora, que a nave regressa à Terra, novamente a uma velocidade próxima da da luz (medida no seu referencial de inércia local), i.e., ao longo da ramificação esquerda do cone de luz, com  $dx'/dt' = -1$ . Logo, das eqs.(2.3) retira-se a seguinte relação:  $v_r \equiv \frac{dx}{dt} \approx -\frac{1}{k} = \frac{1}{1-\delta} \approx 1$  e  $dt < 0$  (visto que  $dx < 0$ ).

O regresso da nave à Terra desde Deneb efectua-se num intervalo de tempo  $\Delta t_r = -D/v_r = D(\delta - 1)$ . O tempo total de ida e volta, medida na Terra será  $t_E = D + \Delta t_r = D\delta$ . Por simplicidade, consideremos a espessura  $\varepsilon$  negligível.

Numa viagem superluminal está implícito, pois, que  $|\Delta t_r| < D$  (se  $\delta > 0$ ) e que o intervalo entre a partida de Deneb e a chegada à Terra é espacial. Note-se que  $t_E > 0$ , o que significa que a chegada à Terra precede necessariamente a sua partida. Mas  $t_E$  poderá tomar um valor praticamente nulo, atendendo a uma escolha apropriada do parâmetro  $\delta$ . Esta métrica, por si só, não gera curvas temporais fechadas, visto que  $t_E > 0$ , i.e. a nave não viaja para o seu passado. O aparecimento de curvas temporais fechadas é possível apenas na generalização ao caso quadri-dimensional.

### **4.4 Uma viagem instantânea**

Existe uma outra propriedade interessante da métrica de Krasnikov, em que a viagem é instantânea,  $dt/dt' = 0$ , quando vista por observadores nas regiões exteriores da fig.4.1. Em concreto, se



$\delta < 1$ , existe um determinado valor de  $dx'/dt'$  para o qual se verifica  $dt/dt' = 0$ . Esta observação também pode ser deduzida da fig.4.2. Então, da eq.(4.4), obtemos a seguinte relação:

$$\frac{dx'}{dt'} = -\frac{\delta}{2 - \delta}$$

que está compreendida entre 0 e  $-1$  para  $0 < \delta < 1$ .

### 4.5 A generalização quadri-dimensional

A quatro dimensões, a modificação da métrica inicia-se ao longo da trajectória da nave, que se move segundo o do eixo  $0x$ . A modificação da métrica ocorre na posição  $x$ , e no instante  $t \approx x$ , que é o tempo de passagem da nave em  $x$ .

Suponhamos que a perturbação da métrica se propaga radialmente a partir do eixo  $0x$ , de modo que a causalidade implica que no instante  $t$  a região em que a métrica foi modificada não poderá estender-se além de  $\rho = t - x$ , com  $\rho = (y^2 + z^2)^{1/2}$ . Requer-se, também, que a modificação não se estenda além de uma distância radial máxima,  $\rho_{\text{máx}} < D$ , do eixo dos  $0x$ . Logo, num espaço-tempo quadri-dimensional podemos substituir a eq.(4.2) por:

$$k(x, t, \rho) \equiv 1 - (2 - \delta) \theta_\varepsilon(\rho_{\text{máx}} - \rho) \theta_\varepsilon(t - x - \rho) [\theta_\varepsilon(x) - \theta_\varepsilon(x + \varepsilon - D)] \quad (4.5)$$

e a métrica em coordenadas cilíndricas, será dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + (1 - k(x, t, \rho)) dx dt + k(x, t, \rho) dx^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2. \quad (4.6)$$

Consideremos, por simplicidade, que todos os parâmetros,  $\varepsilon$ , nas funções  $\theta_\varepsilon$ , são iguais. Para  $t \gg D + \rho_{\text{máx}}$ , temos um tubo de raio  $\rho_{\text{máx}}$  centrado no eixo  $0x$ , dentro do qual a métrica foi modificada. Esta estrutura é designada por “tubo de Krasnikov”. Em contraste com a métrica de Alcubierre, a de Krasnikov é estática a partir do momento da sua criação. Para  $\rho_{\text{máx}} \gg \varepsilon$ , o tubo consiste de uma região central plana, com o raio de  $\rho_{\text{máx}} - \varepsilon$ , ao longo de  $\varepsilon < x < D - \varepsilon$  e  $k = \delta - 1 = \text{constante}$ . Esta região central é envolvida por camadas finas e extremidades de espessura  $\varepsilon$ , com  $k$  a variar entre  $k = \delta - 1$  e  $k = 1$ . Esta análise está representada na fig.4.3, que mostra secções transversais de uma região do tubo em que  $\varepsilon < x < D - \varepsilon$  e de uma das extremidades.

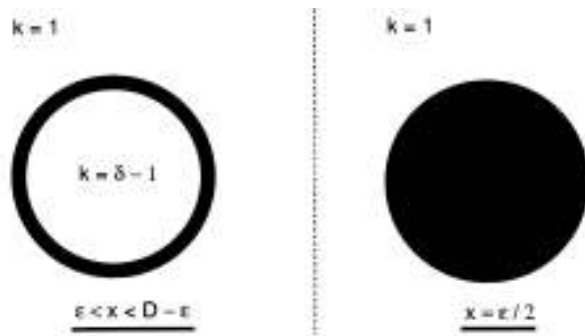


fig.4.3 Secções transversais espaciais do tubo de Krasnikov, com  $x = c^{te}$  e  $t = c^{te}$ .  
 O primeiro diagrama é uma secção transversal de um plano em  $\varepsilon < x < D - \varepsilon$ .  
 O segundo é uma secção transversal de uma das extremidades.

## 5. Restrições impostas pela Desigualdade Quântica

Desde o artigo clássico de Morris-Thorne [2], é conhecido que os *wormholes* transitáveis violam todas as condições de energia e as condições de energia média, que são fundamentais aos teoremas de singularidades e aos teoremas clássicos da termodinâmica de buracos negros [8]. Verifica-se que as soluções do *warp drive* e do tubo de Krasnikov também violam, especificamente, as condições de energia nula e fraca [5, 10]. Apesar das formas clássicas de matéria obedecerem às condições de energia, sabe-se que algumas são violadas por alguns campos quânticos, entre os quais podemos referir os campos escalares e fermiônicos quantizados, a evaporação de Hawking, o vácuo de Hartle-Hawking, a inflação cosmológica, etc.

A investigação pioneira desenvolvida por Ford [11], no fim da década de 1970, num novo sistema de restrições de energia, conduziu às restrições de fluxos de energia negativa em 1991 [12]. Estas, eventualmente, culminaram na forma da Desigualdade Quântica (DQ), aplicada a densidades de energia, que foi introduzida por Ford e Roman em 1995 [13].

A DQ foi deduzida da Teoria Quântica de Campo, num espaço-tempo 4-dimensional de Minkowski, para campos escalares sem massa e toma a seguinte forma:

$$\hat{\rho} = \frac{\tau_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \rangle}{\tau^2 + \tau_0^2} d\tau \geq -\frac{3}{32\pi^2 \tau_0^4}$$

em que,  $U^\mu$  é a tangente à geodésica de um observador;  $\tau$  é o tempo próprio do observador e  $\tau_0$  é o tempo de amostragem. O valor de expectativa  $\langle \rangle$  é estabelecido em relação a um estado arbitrário  $|\psi\rangle$ .

Ao invés do que sucede com as condições de energia média, não é feita uma média ao longo de toda a linha de universo de um observador, antes se pesa o integral com uma função de amostragem de espessura característica,  $\tau_0$ . A desigualdade oferece um limite à magnitude das violações da energia negativa e ao tempo em que a estas lhes é permitido existir. Uma aplicação imediata a espaços-tempos curvos é que estes são aproximadamente planos se estiverem restringidos a regiões muito pequenas.

Utilizando as restrições impostas pela DQ aos *wormholes* e à métrica do *warp drive*, verifica-se que a espessura da garganta do *wormhole* e da parede da bolha de Alcubierre é extraordinariamente fina, da ordem de centenas do comprimento de Planck. Verifica-se, também, que as energias necessárias para manter a bolha do *warp drive* e o tubo de Krasnikov, utilizadas em viagens interestelares, não são fisicamente plausíveis, pois são extremamente elevadas. Por exemplo, se a massa de uma galáxia típica é da ordem de  $M_{Via Láctea} \approx 10^{12} M_{Sol} = 2 \times 10^{42} \text{kg}$ , a energia necessária para manter a bolha de Alcubierre é da ordem de:  $E \leq -5,5 \times 10^{21} M_{galáxia} v_b$ , o que é da ordem de  $10^{10}$  vezes maior<sup>5</sup> do que a massa total do universo visível<sup>6</sup>. Para construir um tubo de Krasnikov com um raio e comprimento de  $1m$  é necessário um energia negativa da ordem de  $10^6$  massas galácticas. Para um tubo que se estende a partir da Terra até à estrela mais próxima ( $\alpha$  Centauri), i.e.,  $D \approx 4 \times 10^{16} m$ , é necessário  $E \approx -10^{32} M_{galáxia}$ .

Da aplicação da DQ, tanto aos *wormholes*, como ao *warp drive* e ao tubo de Krasnikov, concluiu-se que estas soluções são fisicamente pouco plausíveis. No entanto, tais aplicações levantam uma série de objecções [14]. Em primeiro lugar, a DQ apenas tem interesse se nos apoiarmos na teoria quântica de campo para proporcionar a matéria exótica necessária a estas soluções. Existem, não obstante, sistemas clássicos (campos escalares não-acoplados) que violam as condições de energia nula e fraca [17], apresentando, simultaneamente, resultados plausíveis quando sujeitos à DQ. Em segundo

<sup>5</sup> No regime oposto, para bolhas de Alcubierre microscópicas, as dimensões obtidas são atenuadas. Por exemplo, considerando uma bolha com as dimensões de um comprimento de onda de Compton de um electrão, a energia negativa teria a ordem de  $E \sim -10^4 M_{Sol}$ .

<sup>6</sup> Devido a estas enormes quantidades de matéria exótica, van den Broeck recentemente propôs uma ligeira modificação da métrica de Alcubierre que melhora consideravelmente as condições do *warp drive* [16, 17].

lugar, mesmo se a teoria quântica de campo fornecer a matéria exótica necessária, a DQ não proíbe as soluções acima referidas, apenas impõe sérias restrições à sua geometria. Em terceiro lugar, seria conveniente reformular a DQ numa notação covariante mais transparente e deduzi-la para geometrias arbitrárias.

Apesar do excelente trabalho realizado por Ford e Roman na dedução das DQ e nas suas subseqüentes aplicações [18, 19, 20], a versão actual da DQ certamente não será a última palavra quanto à matéria exótica e às violações das condições de energia.

## Bibliografia

- [1] Misner, C.W., K.S. Thorne, and J.A. Wheeler (1973). “Gravitation”, W.H. Freeman and Company, New York.
- [2] Morris, M., and K.S. Thorne (1988). “Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching General Relativity”, *Am. J. Phys.* **56**: 395-412.
- [3] Sagan, C. (1985). “Contacto”, Gradiva.
- [4] D’Inverno, R. “Introducing Einstein’s Relativity”, Oxford University Press.
- [5] Alcubierre, M. (1994). “The Warp drive: hyper-fast travel within general relativity”, *Class. Quant. Grav.* **11**: L73-177.
- [6] Parsons, D. (1996). “A warped view of time travel”, *Science* **274**: 202-203.
- [7] Hawking, S.W., and G.F.R. Ellis. “The Large Scale Structure of Space-Time”, Cambridge University Press.
- [8] Visser, M. (1995). “Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking”, American Institute of Physics Press.
- [9] Krasnikov, S.V. (1998). “Hyper-fast Interstellar Travel in General Relativity”, *Phys. Rev. D* **57**: p.4760. *gr-qc/9511068*.
- [10] Everett, A.E., and T.A. Roman (1997). “A Superluminal Subway: The Krasnikov Tube”, *Phys. Rev. D* **56**: p.2100. *gr-qc/9702049*.
- [11] Ford L.H. (1978). “Quantum coherence effects and the second law of thermodynamics”, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. **364**, 227.
- [12] Ford, L.H. (1991). “Constraints on negative-energy fluxes”, *Phys. Rev D* **43**, 3972.
- [13] Ford, L.H., and T.A. Roman (1995). “Averaged energy conditions and quantum inequalities”, *Phys. Rev D* **51**: 4277. *gr-qc/9410043*.
- [14] Lobo, F e Crawford, P (2000). “Constraints on Wormhole geometries”, The Ninth Marcel Grossmann Meeting, University of Rome “*La Sapienza*”, 2-8 July, 2000, submitted to World Scientific.
- [15] van den Broeck, C. (1999). “A warp drive with more reasonable total energy requirements”, *gr-qc/9905084*.
- [16] van den Broeck, C. (1999). “On the (im)possibility of warp bubbles”, *gr-qc/9906050*.
- [17] Barcelo, C., and M. Visser (2000). “Scalar fields, energy conditions, and traversable wormholes”, *Class. Quant. Grav.* **17**: 3843. *gr-qc/0003025*.
- [18] Ford, L.H., and T.A. Roman (1995). “Averaged energy conditions and quantum inequalities”, *Phys. Rev D* **51**: 4277. *gr-qc/9410043*.
- [19] Ford, L.H., and T.A. Roman (1996). “Quantum field theory constrains traversable wormhole geometries”, *Phys. Rev D* **53**: 5496. *gr-qc/9510071*.
- [20] Pfenning, M.J., and L.H. Ford (1997). “Quantum inequalities on the energy density in static Robertson-Walker spacetimes”, *Phys. Rev. D* **55**: 4813. *gr-qc/9608005*.